GEOMETRÍA MÉTRICA

INTRODUCCIÓN.

A1. Observa que:

Si $A(x_1,y_1,z_1)$ y $B(x_2,y_2,z_2)$, entonces

$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Usando sólo la escena:

Si $A(-1,-1,0)$ y $B(k,-2,2)$, ¿qué dos valores puede tomar k para que $d(A,B)=3$?

Solución:

A2. Observa que

$v\times w$ es un vector con las siguientes características:

- su dirección es perpendicular a v y a w,
- su sentido viene dado por la regla del sacacorchos,
- su módulo coincide con el área del paralelogramo determinado por v y w.

Usando sólo la escena:

Si $v=(1,-2,0)$ y $w=(-2,2,-1)$, ¿qué diferencia hay entre $v\times w$ y $w\times v$?

Solución:

A3. Recuerda:

$|[u,v,w]|=$Volumen del paralelepípedo que determinan u, v y w.

Observa que si u, v y w son coplanarios (están en un plano), el producto mixto es nulo (no hay volumen). Pon un ejemplo con tres vectores no nulos u, v y w.

Solución:

A4.-Representa el vector de origen el punto $A(1,2,-2)$ y extremo el punto $B(0,-1,1)$.

Solución: Coordenadas de P y v. $P(\quad,\quad,\quad)$ y $v=(\quad,\quad,\quad)$.

A5.-La recta r representada pasa por el punto $(-1,0,-3)$ y tiene como vector director $(-1,2,1)$. Sitúa el vector director sobre la recta. Sitúalo sobre otro punto de la recta.

Solución: $P(\quad,\quad,\quad)$ y $v=(\quad,\quad,\quad)$. Nuevo punto $P(\quad,\quad,\quad)$.

A6.-El plano representado es $\pi \equiv 2x-3z=5$. Comprueba que el punto $(1,-1,-1)$ está en el plano y sitúa en él un vector perpendicular al plano.

Solución:

a) Comprobación:

b) Vector perpendicular al plano $v=(\quad,\quad,\quad)$.

A7.-La recta *s* representada es

$$\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x-3y+z=1 \end{cases}$$

Comprueba que el punto $(3,2,1)$ está en la recta, halla un vector director y representa el vector con origen en el punto.

Solución:

a) Comprobación:

b) Vector director $v=(\quad,\quad,\quad)$.

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO.

$d(P,\pi)=d(P,Q)$ siendo Q el pie de la perpendicular.

A8.-En esta escena aparecen un plano π determinado por un punto *A* y un vector característico *n*, y un punto *P*. ¿Cuál es la distancia de *P* al plano π?

Solución:

a) ¿Cuál es la ecuación del plano π elegido? ¿Quién es *P*?

b) ¿Quién es *R*, aproximadamente, para que coincida con el pie de la perpendicular?

c) ¿Cuál es $d(P,\pi)$? (Observa el valor en la escena)

A9.-Con la siguiente escena vamos a obtener una fórmula para hallar la distancia desde un punto *P* a un plano.

Solución: Explica cómo se obtiene la fórmula siguiendo los pasos

Si el plano π está determinado por el punto *P* y el vector característico *n*:

$$d(P,\pi)=\frac{|AP\cdot n|}{|n|}$$

Expresión analítica:
Si $P(x_0,y_0,z_0)$ y $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$, entonces

$$d(P,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

E1.-Demuestra la fórmula anterior (expresión analítica de la distancia de un punto a un plano).

E2.-Halla el pie de la perpendicular a $\pi \equiv 2x-3y+z-8=0$ desde el punto $P(-2,2,4)$. Halla la distancia de P al pie y al plano.

E3.-Halla k para que el plano $\pi \equiv 2x-3y+6z=0$ sea paralelo al plano $\pi' \equiv kx+y-z+4=0$. Halla la distancia entre los planos.

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA.

d(P,r)=d(P,Q) siendo *Q* el pie de la perpendicular.

A10.-En esta escena aparecen una recta *r* (determinada por un punto *A* y un vector director *v*) y un punto *P*. ¿Cuál es la distancia de *P* a *r*?

Solución:

a) ¿Cuál es la ecuación de la recta *r* elegida? ¿Quién es *P*?

b) ¿Quién es *R*, aproximadamente, para que coincida con el pie de la perpendicular?

c) ¿Cuál es *d(P,r)?* (Observa el valor en la escena)

A11.-En la escena siguiente se obtiene una fórmula para hallar la distancia desde un punto *P* a una recta *r*.

Solución: Explica cómo se obtiene la fórmula siguiente recorriendo los pasos de la escena:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} v & \text{vector director} \\ A & \text{punto} \end{cases} \\ P \quad \text{punto} \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,r) = \frac{|AP \times v|}{|v|}$$

E4.-Halla la distancia del punto *A(−1,2,0)* a la recta que pasa por los puntos *B(5,−2,2)* y *C(5,3,−1).*

E5.-Halla el pie de la perpendicular a $r \equiv x=3y=-z+1$ desde el punto $P(-2,2,4)$. Halla la distancia de P al pie y a la recta.

E6.-Halla *a* y *b* para que las rectas *r* y *s* sean paralelas. Halla la distancia entre las rectas.

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 2 \\ \\ 2x - 3y + z = 1 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1 + a \cdot t \\ y = 2 - 10 \cdot t \\ z = b \cdot t \end{cases}$$

A12.-Con esta escena veremos cómo obtener una fórmula para hallar la distancia entre las rectas *r* y *s* que cruzan.

Solución: Explica cómo se obtiene la fórmula siguiente recorriendo los pasos de la escena:

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} A & \text{punto} \\ v & \text{vector director} \end{cases} \\ r' \equiv \begin{cases} A' & \text{punto} \\ v' & \text{vector director} \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow d(r,r') = \frac{\left|\det(AA', v, v')\right|}{\left|v \times v'\right|}$$

A13.-Otra demostración de la expresión anterior está en la siguiente escena.
Solución: Explica cómo se obtiene la fórmula siguiendo los pasos

E7.-Estudia la posición relativa de las rectas $r \equiv x=-y=-z+1$ y . Halla la distancia entre ellas según los valores de k.

ÁNGULO ENTRE RECTAS

Sea *(r,s)* el ángulo que forman las rectas *r* y s.

$$\cos(r,s)=\frac{|v_r\cdot v_s|}{|v_r|\cdot|v_s|}$$

Si $v_r=(a_1,b_1,c_1)$ y $v_s=(a_2,b_2,c_2)$, *entonces*

$$\cos(r,s)=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

En particular (y con v_r y v_s no nulos porque sino no dan una dirección):

- *r* y *s* son perpendiculares $\Leftrightarrow$ $v_r\cdot v_s=0$
- *r* y *s* son paralelas $\Leftrightarrow$ v_r *y* v_s son proporcionales ($v_r = k\cdot v_s$, donde *k* es un nº real)

A14.-En esta escena están representadas dos rectas:

$$r\equiv\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{-1}$$

$$s\equiv\begin{cases}x=-1-t\\ y=2t\\ z=-2+3t\end{cases}$$

Halla un punto y un vector director de cada recta. Usa estos datos en la escena para situar los vectores directores sobre cada recta.
Halla el ángulo que forman *r* y *s*. (Si tu respuesta anterior es correcta verás la solución en la escena)
Comprueba que el ángulo *(r,s)* es el mismo eligiendo otros vectores directores para *r* y *s*. Observa también que para hallar el ángulo sólo se necesitan los vectores, no se necesitan puntos.

Solución:

a) Punto y vector director de *r*:
   Punto y vector director de *s*:
b) Ángulo que forman *r* y *s*

c) Otros vectores directores para *r* y *s*, y ángulo que forman.

E8.-Comprueba en tu cuaderno que las siguientes rectas son perpendiculares:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ z = 0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 2t - 3 \end{cases}$$

E9.-Escribe en tu cuaderno un vector director de la siguiente recta y busca las ecuaciones de una recta paralela y otra perpendicular.

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x - 3y - 3z = 2 \end{cases}$$

ÁNGULO ENTRE PLANOS

Sea (π,π') el ángulo que forman los planos π y π'.

$$\cos(\pi, \pi') = \frac{|n \cdot n'|}{|n| \cdot |n'|}$$

Si $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ y $\pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$ son los dos planos, entonces

$$\cos(\pi, \pi') = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

A15.-Los planos representados son:

$$\pi \equiv x+y-z=0 \quad \pi' \equiv x+2y-z=-1$$

Busca un punto común y vectores característicos de cada plano. Usa estos datos en la escena para situar los vectores.
¿Qué ángulo forman los planos? (Si tu respuesta anterior es correcta verás la solución en la escena)
Comprueba que el ángulo es el mismo eligiendo otros vectores característicos de cada plano. Observa también que para hallar el ángulo sólo se necesitan los vectores, no se necesitan puntos.

Solución:

a) Punto y vector característico de π:
   Punto y vector característico de π':
b) Ángulo que forman π y π'

c) Otros vectores característicos para π y π', y ángulo que forman.

E10.-¿Cuántos planos son paralelos a $x+y-z=0$? Escribe la ecuación general de uno de ellos. ¿Cuántos planos son perpendiculares a $x+2y-z=-1$? Escribe la ecuación de uno de ellos.

ÁNGULO ENTRE RECTA Y PLANO

Si el ángulo que forman una recta y un plano es *(r, π)*

$$\operatorname{sen}(r,\pi)=\frac{|v_r\cdot n|}{|v_r|\cdot|n|}$$

Si *v=(a,b,c)* y *n=(A,B,C)*, entonces

$$\operatorname{sen}(r,\pi)=\frac{|aA+bB+cC|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

En particular (y con *v* y *n* no nulos porque sino no dan una dirección):

- *r* y π son paralelos ⇔ *v·n=0*
- *r* y π son perpendiculares ⇔ *v* y *n* son proporcionales

A16.-El plano y la recta representados son:

$$\pi \equiv 2x+y-z+3=0$$

$$r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+2}{-3}$$

Busca el punto de corte de la recta y el plano, y sitúa en él un vector director de la recta y un vector característico del plano.
¿Qué ángulo forman la recta y el plano? (Si tu respuesta anterior es correcta verás la solución en la escena)
Comprueba que el ángulo es el mismo eligiendo otros vectores característicos de cada plano. Observa también que para hallar el ángulo sólo se necesitan los vectores, no se necesitan puntos.

Solución:

a) Punto de corte de *r* de π.

Vector director de *r* y vector característico de π:

b) Ángulo que forman *r* y π

c) Otros vectores para *r* y π, y ángulo que forman.

E11.-Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta *r* que pase por el origen.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{-3}$$

E12.-Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,-2,3)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$

PERPENDICULAR COMÚN

A17.-Con la siguiente escena vamos a obtener la ecuación de la recta perpendicular a otras dos dadas.

Solución:

a) ¿Cuáles son las rectas elegidas? (Punto y vector director de *r* y *r'*)

b) Producto vectorial de los vectores directores de las rectas.

c) Plano que contiene a *r* y a la recta que buscamos

d) Plano que contiene a *r′* y a la recta que buscamos

e) Ecuación de la perpendicular común (expresada como corte de dos planos)

La recta ***s*** perpendicular común se puede expresar como corte de dos planos:

- Plano que contiene a ***r*** y a ***s***; conocemos un punto ***A*** (que está en ***r***) y los vectores direccionales ***v*** (director de ***r***) y ***v***×***v'*** (director de ***s***).
- Plano que contiene a ***r'*** y a ***s***; conocemos un punto ***A'*** (que está en ***r'***) y los vectores direccionales ***v'*** (director de ***r'***) y ***v***×***v'*** (director de ***s***).

Si ***X*** es ***(x,y,z)***, la ecuación de la recta es:

$$s \equiv \begin{cases} \det(AX, v, v\times v') = 0 \\ \det(A'X, v', v\times v') = 0 \end{cases}$$

A18.-En esta escena descubriremos otra forma de hallar la perpendicular común. Conviene que las rectas estén expresadas con sus ecuaciones paramétricas.

Solución: Explica cómo se obtiene la perpendicular común.

PUNTOS SIMÉTRICOS

$$\left.\begin{array}{l}P_1(x_1,y_1,z_1)\\P_2(x_2,y_2,z_2)\end{array}\right\}\Rightarrow \textit{Punto medio } M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

A19.-Halla el punto ***P'***, simétrico de ***P****(1,2,−3)* respecto de ***C****(2,1,−1)*.

Solución:

A20.-Para hallar el punto ***P'***, simétrico de ***P*** (color rojo) respecto de la recta ***r*** (color blanco):

1) se busca el plano perpendicular a r que pasa por ***P***

2) se halla el punto de corte de ***r*** y el plano

3) dicho punto es el punto medio de ***P*** y ***P'***.

Utiliza la escena para hallar el punto simétrico del *(0,1,3)* respecto a la recta que pasa por el punto *(1,1,1)* y tiene de vector director *(2,1,0)*.

Solución:

E13.-Explica cómo se halla el punto simétrico respecto a un plano.

E14.-¿Cómo se calcula el plano simétrico respecto a una recta?

ÁREAS

El área de un triángulo es la mitad del área del paralelogramo: [Área del triángulo *ABC*] = 1/2 · $\|AB \times AC\|$

A21.-Esta escena permite visualizar triángulos en el espacio e indica su área. ¿Cuál es el área de un triángulo de vértices *A(2,1,−3)*, *B(1,−2,−3)*, *C(2,−5,−3)*? ¿Qué significa el resultado obtenido?

Solución:

VOLÚMENES

Según la interpretación geométrica del producto mixto queda: [Volumen del tetraedro *ABCD*] = 1/6 · $\|\det(AB,AC,AD)\|$

A22.-Esta escena permite visualizar tetraedros en el espacio e indica su volumen. Halla el volumen de un tetraedro de vértices *A(1,2,−2)*, *B(−3,1,2)*, *C(−1,−1,−1)* y *D(2,2,0)*.

Si cambiamos el vértice *D* de modo que el tetraedro resultante tenga el mismo volumen que *ABCD*, ¿dónde estará el nuevo vértice para que el volumen no varíe?

Solución:

E15.-Dados los puntos $A(1,2,-2)$, $B(-3,1,2)$, $C(-1,-1,-1)$ y $D(2,2,0)$:

a. Comprueba que no son coplanarios (no están en un mismo plano)
b. Halla el volumen del tetraedro *ABCD*.
c. Halla el área del triángulo *ABC*.
d. Halla el punto simétrico a *A* respecto a la recta *BC*.
e. Halla la perpendicular común a las rectas *AB* y *CD*.
f. Halla el ángulo que forman la arista *AB* con la cara *ACD*.
g. Halla el ángulo que forman las caras *ABC* y *ABD*.
h. Halla el ángulo que forman las aristas *AB* y *AC*.
i. Halla la ecuación del plano perpendicular a la cara *ABC* que pasa por *D*.
j. Halla la ecuación de la recta perpendicular a la arista *AD* que pasa por *B*.
k. Halla la altura del triángulo *BCD* correspondiente al vértice *B*.
l. Halla la altura del tetraedro correspondiente al vértice *A*.