GEOMETRÍA DE LOS DETERMINANTES

Introducción

Tanto los libros de texto de bachillerato como los del primer curso de facultad suelen introducir la noción de determinante con su concepto aritmético o algebraico de la siguiente manera:
Sea $A = (aij)$ una matriz cuadrada de orden n, se define el determinante de A como

$$DetA = \sum_{\sigma \in Permutaciones\ de\ orden\ n} signo(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ \cdots \ \cdot a_{n\sigma(n)}$$

Algunos textos comienzan explicando la fórmula con ejemplos antes de escribirla, pero casi todos parecen llevar como hilo conductor del tema la aritmética, fundamental sin duda, pero se ha dejado relegada la idea geométrica del determinante, desaprovechando las ventajas visuales y didácticas de la geometría en la introducción de este elemento, que calcula y determina longitudes, áreas, volúmenes orientados, y amplia este concepto a espacios de dimensión superior.

En este documento no se pretende en ningún caso menospreciar la aritmética del determinante, pues este es una utilísima herramienta de cálculo suficientemente divulgada en los libros de texto, lo que no ocurre con su geometría. La intención de esta comunicación es presentar el determinante como un elemento geométrico y a partir de la geometría llegar a la fórmula aritmética que lo define y entender sus propiedades.

Mediante el applet Descartes se explican **geométricamente**, en el capítulo 1, los **determinantes de orden 2** y sus propiedades, de manera que permita la ampliación del concepto a cualquier dimensión. Este applet se presenta en el web con unas escenas en las que el lector puede manipular los vectores y parámetros ayudándonos de esta manera a comprender, visualizar y palpar los determinantes. La dirección de la página web es:

http://descartes.cnice.mecd.es/Geometria/Geometria_determinante/index.htm

Como esto es papel y no permite la interactividad del applet se transcriben algunos resultados de las escenas utilizadas.

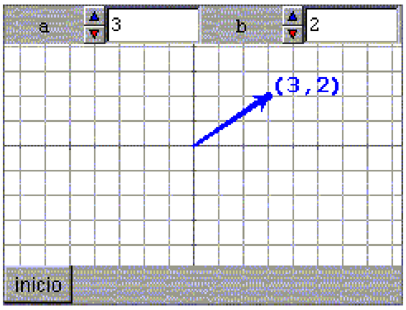
En el capítulo 2 se define y se calcula el **volumen orientado que determinan tres vectores de $\mathbb{R}^3$**; se estudian, desde la geometría, sus propiedades algebraicas y, a continuación, se generaliza este concepto a dimensión n con la fórmula del comienzo.

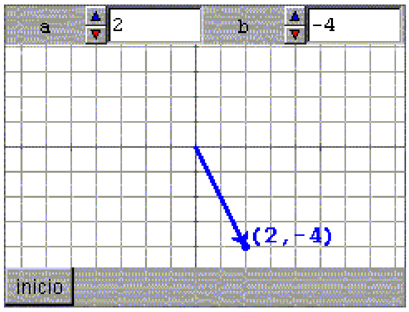
Determinantes de orden 2

Definición de determinante de orden 2

Vectores en $\mathbf{R}^2$

Una fila (a, b) de una matriz cuadrada de orden 2 representa un vector con origen en el punto de coordenadas (0, 0) y extremo en el punto de coordenadas (a, b). Veamos dos resultados de la escena creada para este objeto:

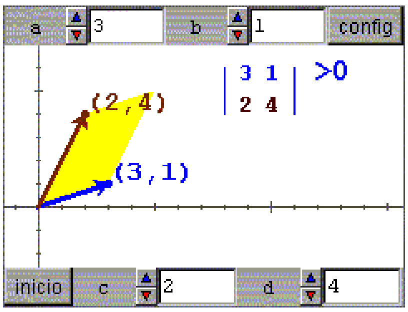


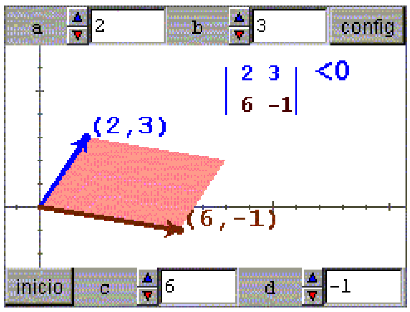


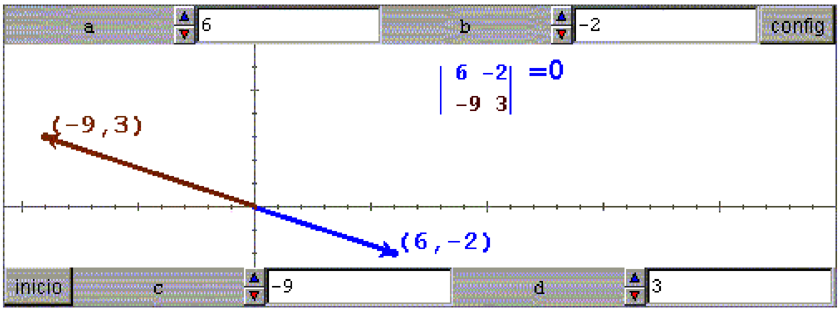
Paralelogramo orientado definido por dos vectores

Una matriz cuadrada de orden 2, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ define dos vectores-fila y estos determinan un paralelogramo cuya área (base.altura) tiene un signo dado por la orientación: Cuando se considera el primer vector-fila como la base positiva del paralelogramo, si el segundo vector-fila determina altura, el área es positiva (paralelogramo amarillo); si por el contrario el segundo vector-fila determina bajura, su área es negativa (paralelogramo rosa)

Esta área orientada es el determinante de la matriz A y se designa por $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ o por $\det A$





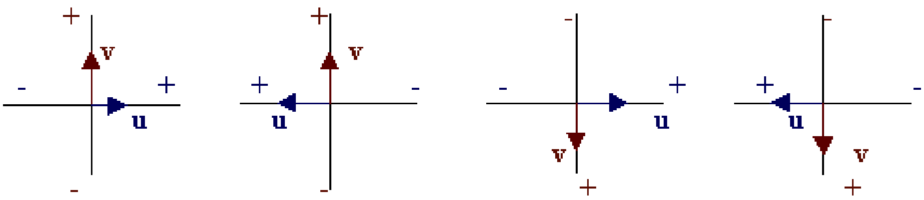


Observamos que el determinante es cero cuando los dos vectores fila están alineados, es decir, cuando no hay área, cuando el espacio que generan los vectores fila de la matriz no es de dimensión 2

Así vemos que dos vectores fila de una matriz 2x2 forman una base de $\mathbb{R}^2$ si y solo si su determinante es distinto de cero. Es importante observar que la orientación de una base de $\mathbb{R}^2$ esta definida por el signo del determinante. A continuación detallamos un poco más la orientación.

Orientación en el plano

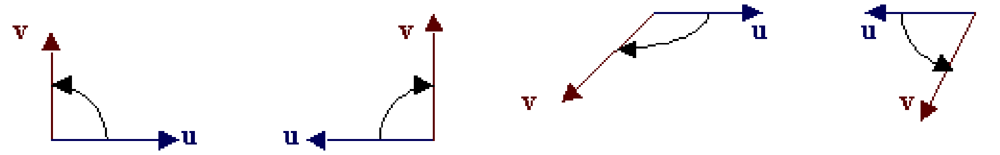
Una base (**u**, **v**) del plano (dos vectores que definen un paralelogramo) tiene orientación positiva o negativa, o como se suele decir, está bien o mal orientada. Veamos algunos ejemplos:



(u, v) **bien orientada** | (u, v) **mal orientada** Positivos a la izquierda | (u, v) **mal orientada** Positivos abajo | (u, v) **bien orientada**

Cuando colocando el semieje de abcisas positivo sobre **u** resulta que **v** representa el semieje de ordenadas positivo, la base (**u**, **v**) está bien orientada

Más ejemplos:



(u, v) de **orientación** + el ángulo de u a v es + | (u, v) de **orientación** -- el ángulo de u a v es -- como las aguias del reloj | (u, v) de **orientación** -- el ángulo de u a v es -- | (u, v) de **orientación** + el ángulo de u a v es +

La orientación es el signo del ángulo de **u** a **v**. Obsérvese que la orientación de la base (u, v) es contraria a la de la base (v, u)

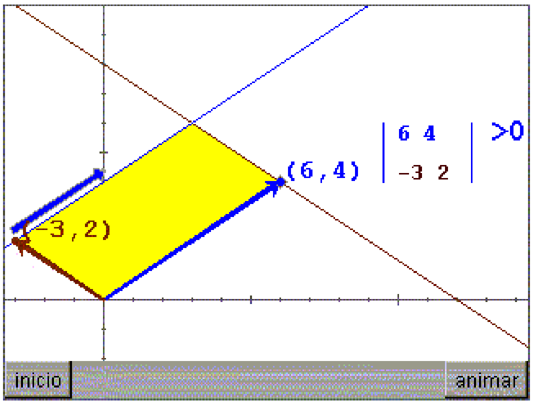
Definición de determinante de orden 2

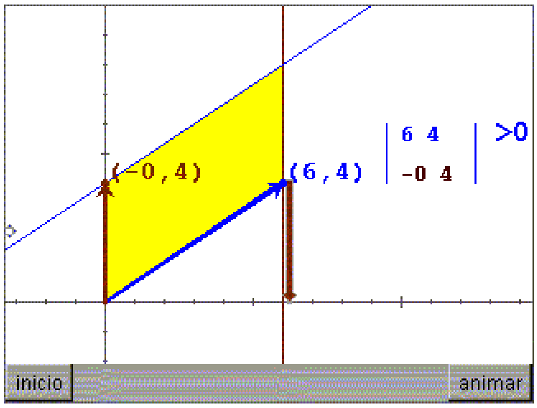
El determinante de una matriz 2x2 con coeficientes en $\mathbb{R}$ es el área orientada del paralelogramo que definen sus vectores fila.

Cálculo de determinantes

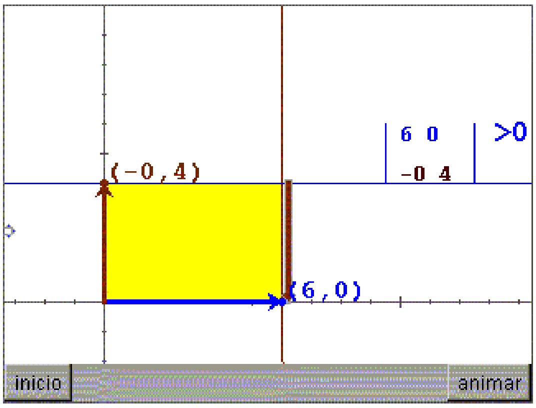
Cálculo geométrico

Los paralelogramos con igual base y altura tienen la misma área, por tanto si se desplaza el vector **v** sobre una paralela al vector **u**, tal como se indica en la figura 1, el área del paralelogramo no varía:





Análogamente al desplazar el vector **u** sobre una paralela al otro lado del paralelogramo se conserva el área:



Ahora es fácil calcular el área del paralelogramo

Cálculo algebraico

Escribamos el álgebra de los pasos geométricos realizados para calcular el determinante:

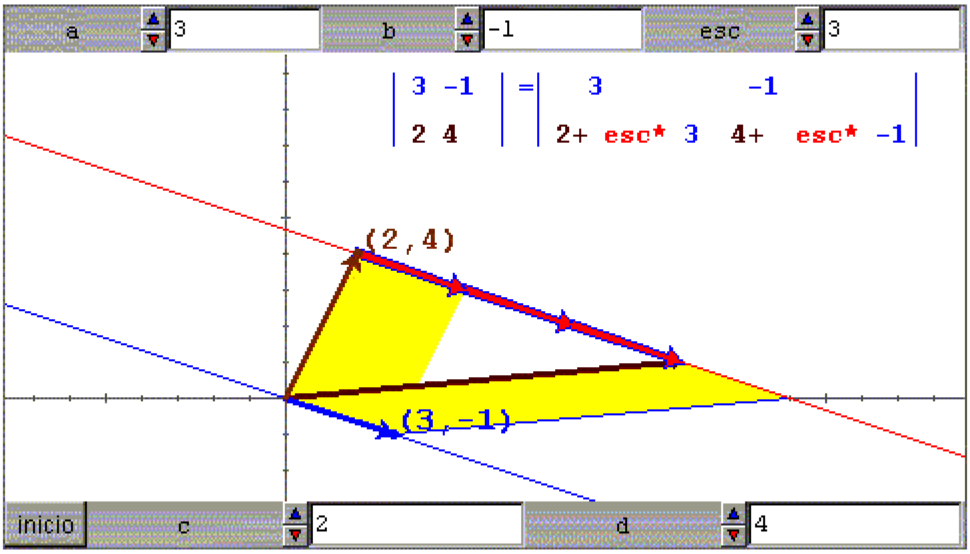
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d - \dfrac{c}{a}\cdot b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & \dfrac{ad-bc}{a} \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & \dfrac{ad-bc}{a} \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} ad - cb$$

(1) Al segundo vector fila se le suma un proporcional al primero (si $a \neq 0$)
(2) Al primer vector fila se le suma un proporcional al segundo
(3) Los vectores fila son perpendiculares

Propiedades de los determinantes

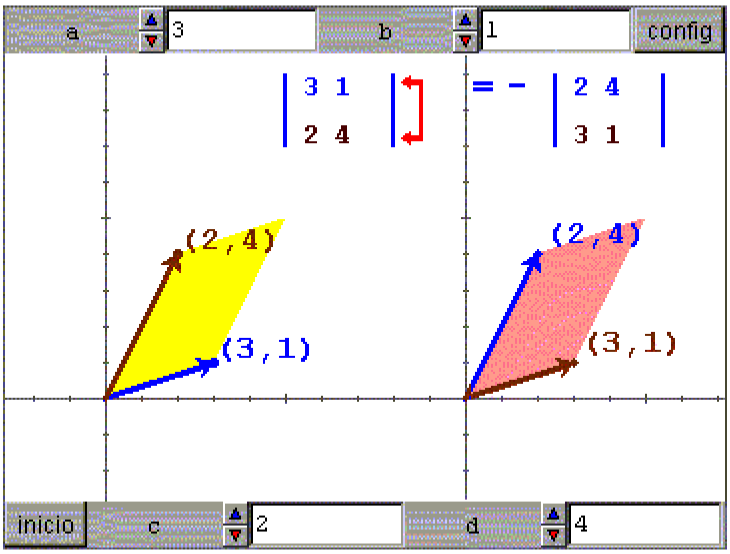
1 Si a una fila se le suma una proporcional a otra, el determinante no varía

En la figura vemos que al sumarle al 2^0 vector-fila un proporcional al 1^0 se obtiene otro paralelogramo con la misma base y la misma altura, luego el determinante no varía



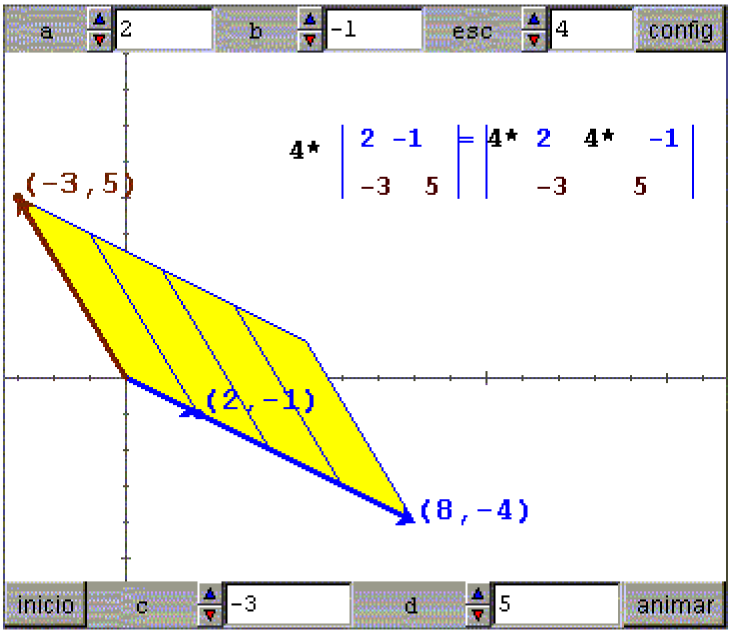
2 El determinante es una forma hemisimétrica

Al permutar dos filas de un determinante este cambia de signo pero su valor absoluto no varía, pues es claro, como se ve en la figura, que el paralelogramo no varía, solo cambia su orientación

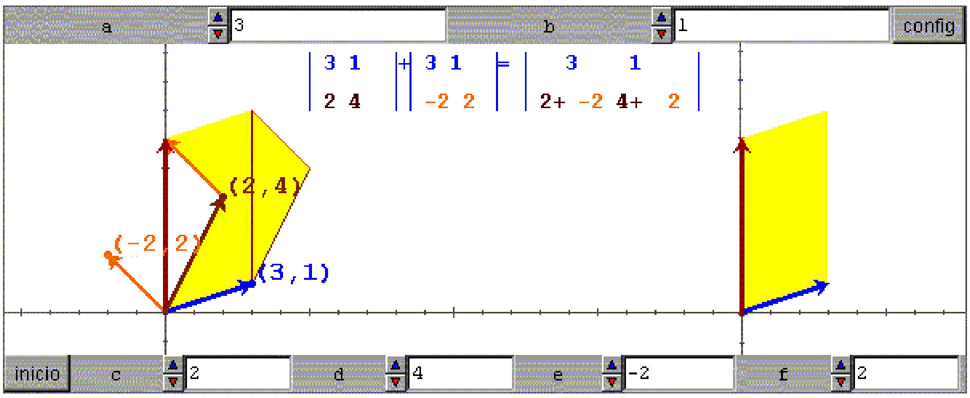


3 El determinante es una forma multilineal

3.a) $\alpha \cdot \begin{vmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \cdot \vec{u} \\ \vec{v} \end{vmatrix}$



3.b) $\begin{vmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{u} \\ \vec{w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} + \vec{w} \end{vmatrix}$



La gráfica del primer miembro de la igualdad se ve en la figura izquierda, si cortamos el triángulo limitado por los segmentos marrones (paralelos a $\vec{v} + \vec{w}, \vec{v}, \vec{w}$) y lo colocamos en el espacio cuyos bordes son los vectores marrones $(\vec{v} + \vec{w}, \vec{v}, \vec{w})$ obtenemos la figura de la derecha que corresponde al valor del segundo miembro de la igualdad

4 El determinante de la matriz identidad es 1

Debido a la ampliación del determinante al n-volumen, es interesante enunciar esta propiedad de la siguiente manera: el valor absoluto del determinante de dos vectores ortonormales es 1, la demostración geométrica es obvia pues la base y la altura del paralelogramo que determinan valen 1

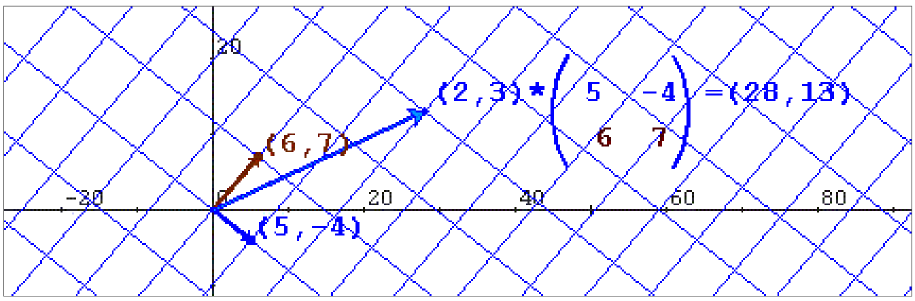
Las propiedades 2, 3.a, 3.b y 4 son propiedades características del determinante como aplicación de $\mathbb{R}^{n \cdot n}$ en $\mathbb{R}$ y también lo son las propiedades 1, 2, 3.a y 4. Este último grupo tiene interés debido a que si se cambia la hemisimetría por la simetría se obtienen las propiedades características del n-volumen como aplicación de $\mathbb{R}^{n \cdot m}$ en $\mathbb{R}^+$

Determinante del producto de matrices

Interpretación del producto de un vector-fila por una matriz

Al multiplicar el vector (2, 3) por una matriz 2x2 se obtiene un vector que es el doble del primer vector-fila de la matriz mas el triple del segundo vector-fila de la misma:

$$(2,3) \cdot \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{v}$$

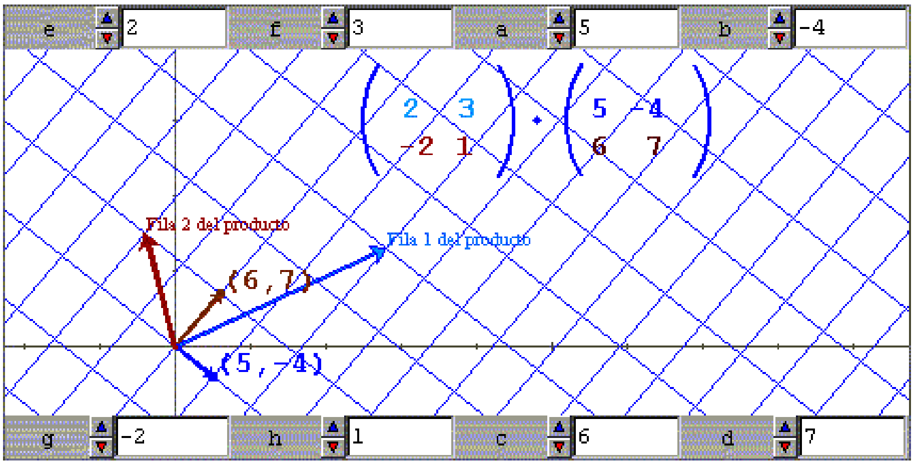


Interpretación del producto de matrices

Ahora es fácil interpretar el producto de matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\vec{u} + 3\vec{v} \\ -2\vec{u} + 1\vec{v} \end{pmatrix} \text{ y en general} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e\vec{u} + f\vec{v} \\ g\vec{u} + h\vec{v} \end{pmatrix}$$

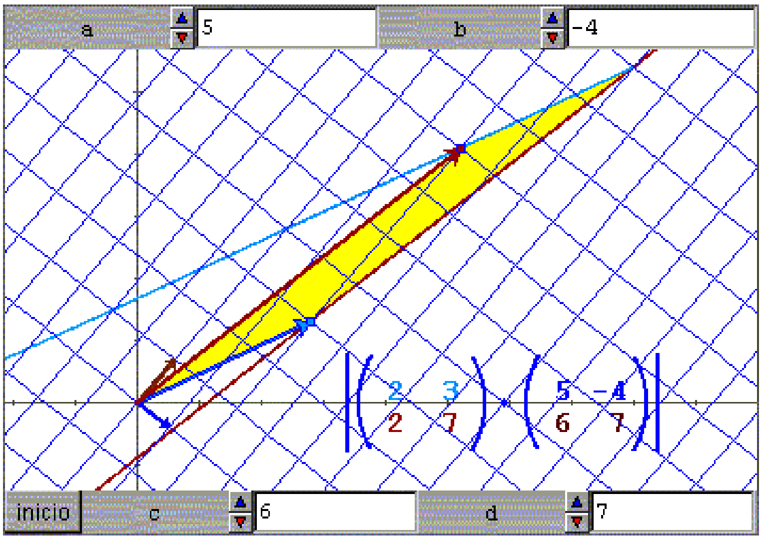
Veámoslo en la figura:



El determinante del producto es el producto de los determinantes

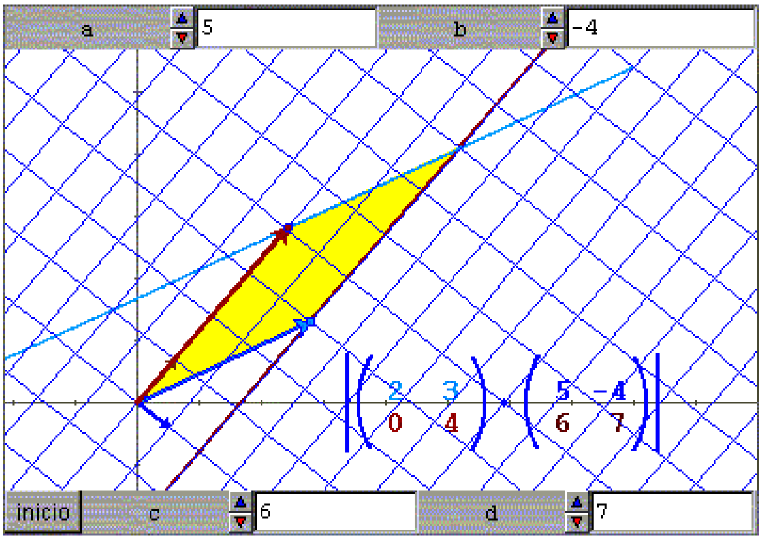
La siguiente figura representa el paralelogramo determinado por los vectores-fila de una matriz produto:

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\right|$$



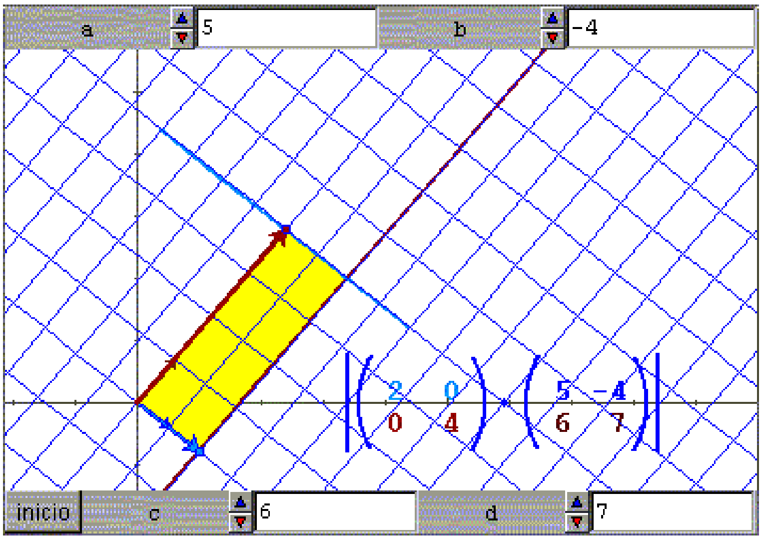
Arrastrando el extremo del segundo vector-fila del producto sobre una recta paralela al primer vector-fila del producto, hasta que este vector sea proporcional al segundo vector-fila de la segunda matriz, se obtiene un paralelogramo de igual área y el determinante del primer factor tampoco varía; la siguiente figura y la expresión algebraica aclarará este casi-trabalenguas:

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\right| \overset{Fig}{=} \left|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\right|, \text{ con } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \overset{p.1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$



Procediendo de forma análoga con la otra fila resulta que

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\right| \overset{Fig}{=} \left|\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\right|, \text{ donde } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{p.1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$



Ahora es fácil ver que el área del paralelogramo total coincide con $2 \cdot 4$ veces el área del parlelogramo pequeño, que es el determinante de la matriz del segundo factor

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

Y por las igualdades anteriores

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

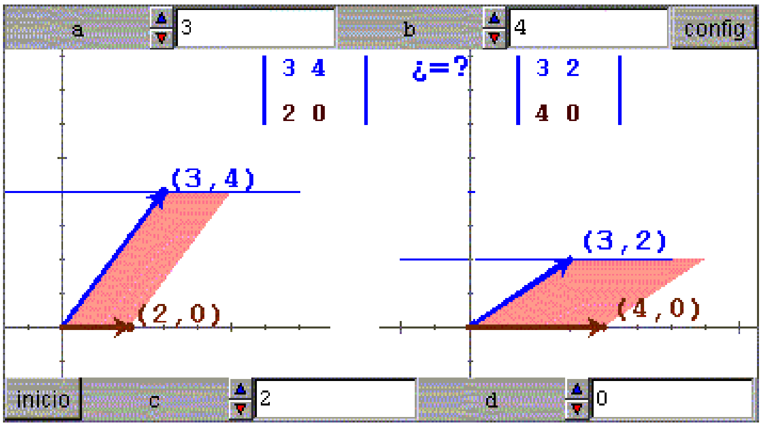
El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta

Un caso particular visto geométricamente

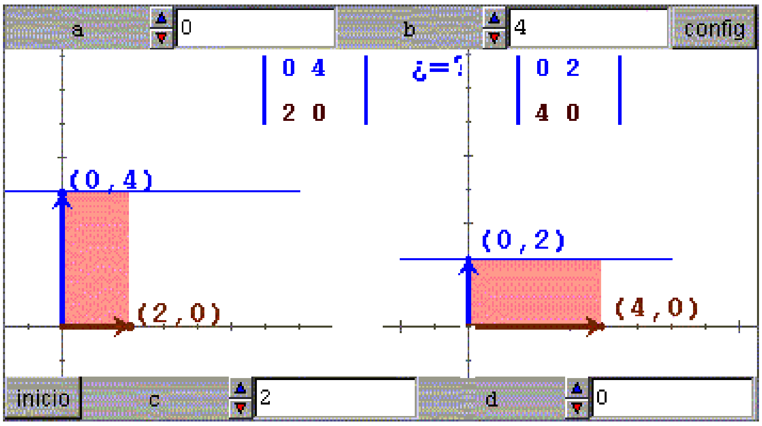
Veamos geométricamente, para los casos en los que algún término de la matriz es nulo, que el determinante de una matriz es igual que el de su traspuesta

Caso d=0

1. Tomamos en la escena a=3, b=4, c=2 y d=0, aparentemente los dos determinantes que se obtienen al tomar el de la matriz y el de la traspuesta son distintos?.



2. Si arrastramos el extremo del primer vector-fila de la matriz de la derecha sobre la recta y=4, el área del paralelogramo no varía y lo que ocurre es que el extremo del primer vector-fila de la traspuesta se arrastra sobre la recta y=2, con lo que el valor de su determinante no cambia:



Y aquí se ve claramente que el determinante de la matriz de la izquierda es igual al de su traspuesta.

A continuación se estudia el álgebra de esta propiedad

detA=detA^t. Demostración algebraica

Al sumar a una fila de una matriz una proporcional a otra, lo que se hace es multiplicar dicha matriz, por la izquierda, por otra de determinante 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}+2\mathbf{a} & \mathbf{d}+2\mathbf{b} \end{pmatrix} \text{ a la fila 2 le sumamos 2 por la fila 1}$$

Al trasponer, este cambio se traduce en multiplicar la matriz traspuesta, por la derecha, por una matriz de determinante 1:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{c} \\ \mathbf{b} & \mathbf{d} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{c}+2\mathbf{a} \\ \mathbf{b} & \mathbf{d}+2\mathbf{b} \end{pmatrix} \text{ a la columna 2 se le suma 2 por la columna 1}$$

Para permutar dos filas de una matriz se multiplica, por la izquierda, por una de determinante -1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{pmatrix} \text{ Se han permutado dos filas de la matriz}$$

Este cambio en la traspuesta se traduce en la multiplicación por la derecha por una matriz de determinante -1:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{c} \\ \mathbf{b} & \mathbf{d} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{a} \\ \mathbf{d} & \mathbf{b} \end{pmatrix} \text{ Se permutaron dos columnas de la matriz}$$

De esta manera diagonalizaremos una matriz y su traspuesta consiguiendo

$$\begin{pmatrix} \textbf{Una matriz de} \\ \mathbf{det{=}R} = \pm 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} & 0 \\ 0 & \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{c} \\ \mathbf{b} & \mathbf{d} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \textbf{Matriz de} \\ \mathbf{det{=}R} = \pm 1 \end{pmatrix}$$

Como el determinante del producto es el producto de los determinantes, **se concluye que el determinante de una matriz es igual al de su traspuesta**. Esta demostración se puede extender a matrices cuadradas de cualquier dimensión

Desarrollo de un determinante por los elementos de una fila

Dada una matriz $A = (a_{ij})$, se llama menor de fila i y columna j, m_{ij}, al resultado de tachar en $|A|$ dicha fila y columna; y el adjunto correspondiente, A$_{ij}$, será igual a (-1)$^{i+j} \cdot m_{ij}$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad m_{12} = a_{21} \qquad A_{12} = -a_{21}$$

Es fácil ver que $detA = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2}$, basta aplicar que el determinante es una forma multilineal hemisimétrica.

Este desarrollo apenas tiene importancia en determinantes de orden 2, pero sí la tiene cuando el orden aumenta.

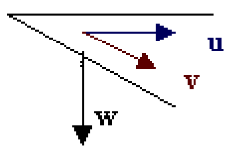
Determinantes de orden 3

Definición del determinante de orden 3

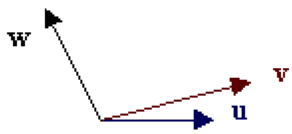
Orientación en $\mathbb{R}^3$

Una base (u, v, w) de $\mathbb{R}^3$ (tres vectores que determinan un paralelepípedo) tiene una orientación positiva o negativa, buena o mala orientación se suele decir también.
Al estar en dimensión 3, podemos ver la base (u, v) del plano <u, v> con orientación positiva, (ahora se puede ver la otra cara del plano), pues bien, si viendo el plano <u, v> con esta orientación resulta que w indica altura, diremos que la base (u, v, w) está bien orientada; si por el contrario w indica bajura, diremos que dicha base está mal orientada.

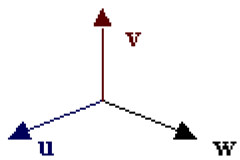
Ejemplos:



(u, v, w) es una base
bien orientada



(u, v, w) es una base
bien orientada

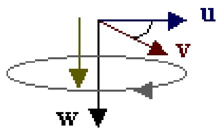


(u, v, w) es una base
mal orientada

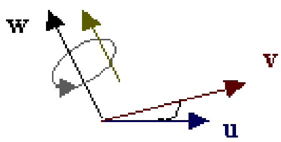
Así pues una base bien orientada se puede ver como (Este, Norte o NE o NO, Altura).

Al igual que en dimensión 2, el concepto de orientación también se puede definir con el sentido del ángulo entre vectores:
Se dice que una base (u, v, w) **tiene orientación positiva** si al girar un tornillo, con la dirección de w, en el sentido rotatorio de u a v, este avanza en el sentido de w; cuando el tornillo avance en sentido contrario a w, se dirá que la orientación de la base es **negativa**.

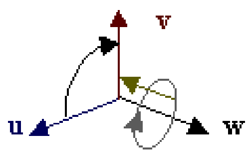
Ejemplos:



(u, v, w) es una base con
orientación positiva

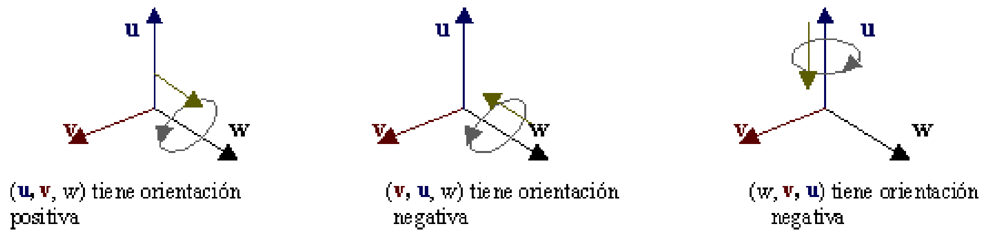


(u, v, w) es una base con
orientación positiva



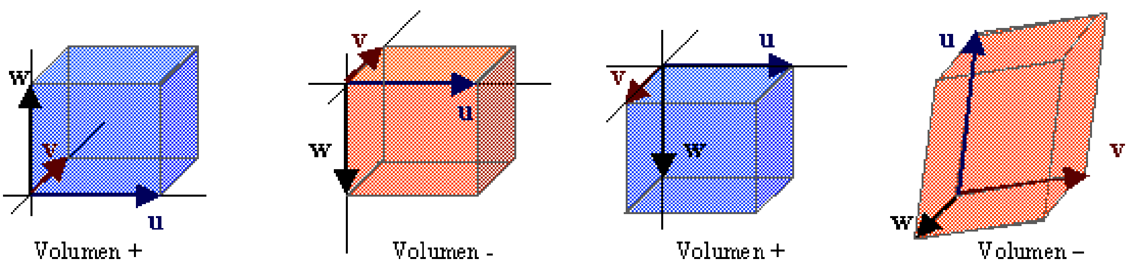
(u, v, w) es una base con
orientación negativa

Obsérvese que al trasponer dos vectores de una base, la orientación cambia de signo:



Determinante de orden 3 = Volumen orientado

Diremos que el volumen del paralelepípedo determinado por 3 vectores (u, v, w) es positivo o negativo según sea la orientación de la base (u, v, w):



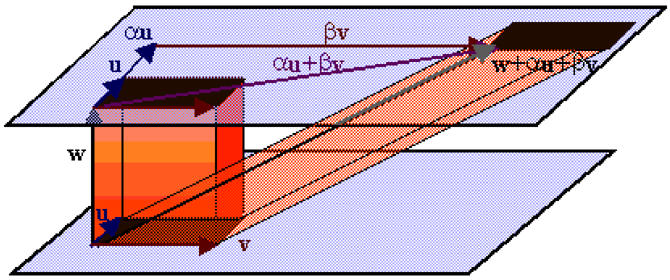
Este concepto coincide con la definición de **volumen = área de la base . altura**, cuando estas se toman orientadas.

Definición: El determinante de tres vectores en $\mathbb{R}^3$ (u, v, w) es el volumen orientado del paralelepípedo que determinan, designaremos este volumen por det(u, v, w).
Si uno de los vectores u, v, w, es combinación lineal de los otros, es decir, si los tres vectores están en el mismo plano, **det(u, v, w) = 0**, pues la altura de este paralelepípedo es 0.

Propiedades de los determinantes

1 Si a una fila se le suma una combinación lineal de las otras, el determinante no varía

En la figura vemos que al sumarle al 3^0 vector-fila una combinación lineal del 1^0 y del 2^0, se obtiene otro paralelepípedo con la misma base y la misma altura, luego el determinante no varía



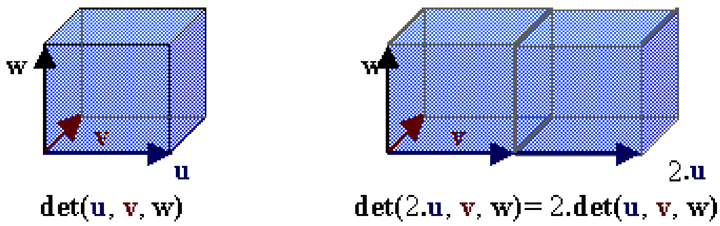
2 El determinante es una forma hemisimétrica

Al permutar dos vectores-fila de una matriz su determinante cambia de signo pero no de valor absoluto. Esta propiedad ya se ha visto al estudiar la orientación en este capítulo:

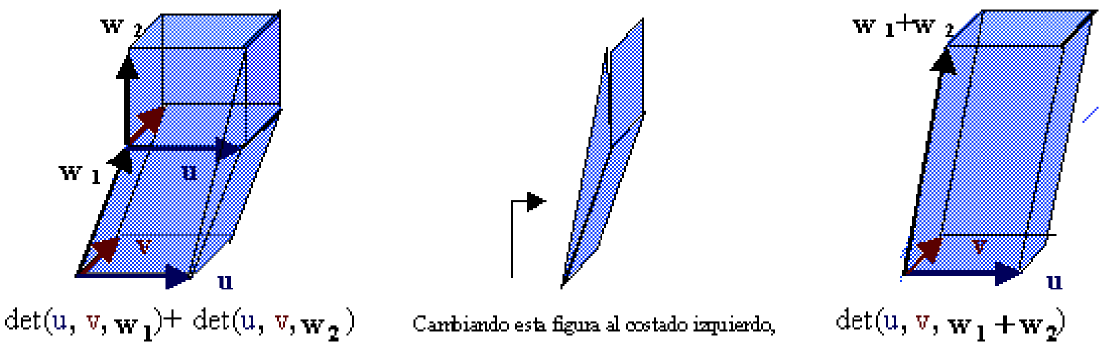
$$\det(u, v, w) = -\det(v, u, w)$$

3 El determinante es una forma multilineal

3.a) $\det(\alpha u, v, w) = \alpha \cdot \det(u, v, w)$ para cualquier número real α



3.b) $\det(u, v, w_1 + w_2) = \det(u, v, w_1) + \det(u, v, w_2)$



4 El determinante de la matriz identidad es 1

Pues el volumen que determina dicha matriz es el de un cubo de lado unidad

Cálculo del determinante de una matriz de orden 3

Sean **i**=(1, 0, 0), **j**=(0, 1, 0) y **k**=(0, 0, 1)

$$\textbf{Det A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=\textbf{det}((a_{11}\mathbf{i}+a_{12}\mathbf{j}+a_{13}\mathbf{k}),(a_{11}\mathbf{i}+a_{12}\mathbf{j}+a_{13}\mathbf{k}),(a_{31}\mathbf{i}+a_{32}\mathbf{j}+a_{33}\mathbf{k}))\overset{p.3}{=}$$

$$=\begin{array}{l}
a_{11}a_{21}a_{31}\det(\mathrm{i},\mathrm{i},\mathrm{i})+a_{11}a_{21}a_{32}\det(\mathrm{i},\mathrm{i},\mathrm{j})+a_{11}a_{21}a_{33}\det(\mathrm{i},\mathrm{i},\mathrm{k})+\\
a_{11}a_{22}a_{31}\det(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{i})+a_{11}a_{22}a_{32}\det(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{j})+\boxed{a_{11}a_{22}a_{33}\det(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k})}+\\
a_{11}a_{23}a_{31}\det(\mathrm{i},\mathrm{k},\mathrm{i})+\boxed{a_{11}a_{23}a_{32}\det(\mathrm{i},\mathrm{k},\mathrm{j})}+a_{11}a_{23}a_{33}\det(\mathrm{i},\mathrm{k},\mathrm{k})+\\
a_{12}a_{21}a_{31}\det(\mathrm{j},\mathrm{i},\mathrm{i})+a_{12}a_{21}a_{32}\det(\mathrm{j},\mathrm{i},\mathrm{j})+\boxed{a_{12}a_{21}a_{33}\det(\mathrm{j},\mathrm{i},\mathrm{k})}+\\
a_{12}a_{22}a_{31}\det(\mathrm{j},\mathrm{j},\mathrm{i})+a_{12}a_{22}a_{32}\det(\mathrm{j},\mathrm{j},\mathrm{j})+a_{12}a_{22}a_{33}\det(\mathrm{j},\mathrm{j},\mathrm{k})+\\
\boxed{a_{12}a_{23}a_{31}\det(\mathrm{j},\mathrm{k},\mathrm{i})}+a_{12}a_{23}a_{32}\det(\mathrm{j},\mathrm{k},\mathrm{j})+a_{12}a_{23}a_{33}\det(\mathrm{j},\mathrm{k},\mathrm{k})+\\
a_{13}a_{21}a_{31}\det(\mathrm{k},\mathrm{i},\mathrm{i})+\boxed{a_{13}a_{21}a_{32}\det(\mathrm{k},\mathrm{i},\mathrm{j})}+a_{13}a_{21}a_{33}\det(\mathrm{k},\mathrm{i},\mathrm{k})+\\
\boxed{a_{13}a_{22}a_{31}\det(\mathrm{k},\mathrm{j},\mathrm{i})}+a_{13}a_{22}a_{32}\det(\mathrm{k},\mathrm{j},\mathrm{j})+a_{13}a_{22}a_{33}\det(\mathrm{k},\mathrm{j},\mathrm{k})+\\
a_{13}a_{23}a_{31}\det(\mathrm{k},\mathrm{k},\mathrm{i})+a_{13}a_{23}a_{32}\det(\mathrm{k},\mathrm{k},\mathrm{j})+a_{13}a_{23}a_{33}\det(\mathrm{k},\mathrm{k},\mathrm{k})
\end{array}$$

Eliminamos los determinantes que no definen volumen por ser de vectores coplanarios y aplicando ahora las propiedades 2 y 4 obtenemos que:

$$\boxed{\begin{array}{l}
\det(\mathrm{i},\mathrm{k},\mathrm{j})=\text{-}\det(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k})=-1\\
\det(\mathrm{j},\mathrm{i},\mathrm{k})=\text{-}\det(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k})=-1\\
\det(\mathrm{j},\mathrm{k},\mathrm{i})=\text{-}\det(\mathrm{i},\mathrm{k},\mathrm{j})=\det(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k})=1\\
\det(\mathrm{k},\mathrm{i},\mathrm{j})=\text{-}\det(\mathrm{k},\mathrm{j},\mathrm{i})=\det(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k})=1\\
\det(\mathrm{k},\mathrm{j},\mathrm{i})=\text{-}\det(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k})=-1
\end{array}}$$

Así pues, $\textbf{detA}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\overset{\textit{Regla de Sarrus}}{=}$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}=$$

$$=\boxed{\sum_{\sigma\in S_3}\text{signo}(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot a_{3\sigma(3)}}$$

Geométricamente el paralelepípedo que determinan los vectores fila se ha descompuesto en seis paralelepípedos paralelos a los ejes de coordenadas

Determinante del producto

Si $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} \vec{u}_B \\ \vec{v}_B \\ \vec{w}_B \end{pmatrix}$ siendo $\vec{u}_B,\vec{v}_B$ y $\vec{w}_B$ tres vectores de $\mathbb{R}^3$,

entonces $A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11}\vec{u}_B+a_{12}\vec{v}_B+a_{13}\vec{w}_B \\ a_{21}\vec{u}_B+a_{22}\vec{v}_B+a_{23}\vec{w}_B \\ a_{31}\vec{u}_B+a_{32}\vec{v}_B+a_{33}\vec{w}_B \end{pmatrix}$ y sus filas son las de A al tomar como base los vectores fila de B. Así pues, el $detA.B$ es el de A multiplicado por el volumen del paralelepípedo que determinan $(\vec{u}_B, \vec{v}_B, \vec{w}_B)$ con lo que se concluye que el determinante del producto es el producto de los determinantes.

El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta

Esta propiedad admite en este orden la misma demostración aritmética que se describió para los determinantes de orden 2. Por tanto, las propiedades descritas para las filas de un determinante son también ciertas para las columnas.

Desarrollo de un determinante por los elementos de una fila

Llamaremos menor de fila i y columna j, $\mathbf{m}_{ij}$, al determinante que resulta al eliminar en la matriz $\mathbf{A}$ la fila i y la columna j. El adjunto $\mathbf{A}_{ij}$ es igual a $(-1)^{i+j} \cdot \mathbf{m}_{ij}$

Observación

$\mathbf{detA}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \mathbf{A}_{11} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ Pues volumen=área.altura y en este caso el primer vector fila (altura) es perpendicular a los otros 2 (base)

Desarrollo del detA por los elementos de la primera fila

$$\mathbf{detA}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{p.3}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{p.1}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} \overset{trasp\ columnas}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \overset{Observación}{=}$$

$=a_{11} \cdot \mathbf{m}_{11} - a_{12} \cdot \mathbf{m}_{12} + a_{13} \cdot \mathbf{m}_{13}$

Desarrollo del detA por los elementos de la fila i

Basta aplicar (i-1) trasposiciones a las filas de $\mathbf{A}$ para tener:

$\mathbf{detA}=(-1)^{i-1} \cdot \mathbf{det}$(fila i, fila 1,...) $=(-1)^{i-1} \cdot (a_{i1} \cdot \mathbf{m}_{i1} - a_{i2} \cdot \mathbf{m}_{i2} + a_{i3} \cdot \mathbf{m}_{i3})=$

$$= a_{i1} \cdot \mathbf{A}_{i1} + a_{i2} \cdot \mathbf{A}_{i2} + a_{i3} \cdot \mathbf{A}_{i3}$$

Definición de determinante de orden n

Ampliamos ahora el determinante a matrices de orden n generalizando la fórmula obtenida para n igual a 2 y a 3:

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n, se define el determinante de A como:

$$\boxed{DetA = \sum_{\sigma \in Permutaciones\ de\ orden\ n} signo(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ \cdots \ \cdot a_{n\sigma(n)}}$$

Esta fórmula extiende a orden n el concepto de longitudes, áreas y volúmenes orientados y verifica las propiedades que se vieron para el orden 2 y 3.

Índice