Ampliación del determinante a las matrices no cuadradas

Distancia entre subvariedades lineales afines

Consolación Ruiz Gil

Departamento de Matemáticas. I.E.S. José María Pereda. Santander

RESUMEN: Así como el determinante de orden 2 es el área orientada del paralelogramo definido por sus vectores fila, 2 vectores en R^3 también definen área (aunque no orientación). Esto sugiere ampliar el concepto de determinante a las matrices no cuadradas con el elemento de volumen. En este artículo se define el volumen de una matriz de n filas en R^m, se estudian sus propiedades y se llega a una fórmula muy cómoda que generaliza el cálculo de distancias entre subvariedades lineales afines.

ABSTRACT: In the same way as the second-order-determinant is the oriented area of the parallelogram defined by the row vectors, two vectors in R^3 define an area (though no orientation). This reasoning suggests extending the concept of determinant to rectangular matrices through the element of volume. In this article, the volume of a matrix is defined, its properties are studied and a very convenient and general formula is obtained to calculate distances between affine linear subvarieties:

$$d(P+ < D >, P'+ < D' >) = \frac{\left\| \begin{matrix} P - P' \\ A \end{matrix} \right\|}{\left\| A \right\|}, \text{ where } < D, D' > = < A >, \text{ with } \|A\| \neq 0$$

Introducción

Cómo se calculan las distancias entre subvariedades lineales afines?

En los libros de Bachillerato y de Álgebra lineal la manera usual de explicar el cálculo de distancias entre subvariedades lineales afines es la siguiente:

La distancia entre dos puntos P y Q es el módulo de su diferencia

$$|P - Q|$$

La distancia de un punto P a una recta r de director d que pasa por P_0 es igual a

$$\frac{\mid d \times (P - P_0) \mid}{\mid d \mid}$$

La distancia de un punto P a un hiperplano π perpendicular a η y que pasa por P_0 es igual a

$$\frac{\mid \eta \cdot (P - P_0) \mid}{\mid \eta \mid}$$

La distancia entre las rectas $r = P + < d >$ y $s = Q + < d' >$, dependiendo de si $< d > = < d' >$ o $< d > \neq < d' >$, es igual a

$$\frac{\mid d \times (P - Q) \mid}{\mid d \mid} \quad \text{o} \quad \frac{[\ P - Q, d, d'\ ]}{\mid d \times d' \mid}$$

La distancia entre dos subvariedades paralelas es igual a la distancia de un un punto de una a la otra.

Parece que en cada caso se sigue un procedimiento distinto, sin dar lugar a una fórmula general que nos permita calcular, por ejemplo, la distancia de una subvariedad de dimensión 7 a otra de dimensión 4, ambas sumergidas en $\mathbb{R}^{20}$

En este artículo se dará una fórmula general para calcular distancias entre subvariedades lineales afines utilizando para ello el elemento de volumen determinado por los vectores fila de una matriz A:

$$\text{volumen}(A) = \sqrt{\det(A \cdot A^t)} = \sqrt{\sum (menores\ de\ orden\ n\ de\ A)^2} \overset{notación}{=} \|A\|$$

Esta fórmula general viene dada por:

$$d(P + < D >, P' + < D' >) = \frac{\left\| \begin{matrix} P - P' \\ A \end{matrix} \right\|}{\left\| A \right\|}, \text{ donde } < D, D' > = < A >, \text{ con } \|A\| \neq 0$$

Tanto el elemento de volumen como esta fórmula se estudian y se demuestran en el artículo. Pongamos un ejemplo del uso de esta fórmula

Ejemplo: distancia entre las rectas r y s

r=(1,0,1)+α(2,1,1) s=(1,1,1)+α(3,0,1), en este caso el subespacio generado por los directores de ambas subvariedades tiene rango 2 luego la matriz A es $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la diferencia *P-P'* entre los dos puntos dados de las subvariedades es (0,1,0), por tanto la distancia entre r y s es $\dfrac{\left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|}{\left\| \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|} = \dfrac{1}{\sqrt{11}}$

Se verá una **extensión de la definición de ángulo entre dos subvariedades lineales afines**, utilizando también el elemento de volumen.

Creemos que el elemento de volumen es bastante desconocido incluso entre estudiantes del postgrado de matemáticas, y su utilidad es múltiple: cálculo de longitudes, áreas, volúmenes, n-volúmenes, distancias, ángulos y ecuaciones de subvariedades lineales afines. El cálculo de n-volúmenes se puede realizar "haciendo ceros" de modo bastante similar al de los determinantes, esto se describe al final del documento.

Recomendamos visitar la página web

http://descartes.cnice.mecd.es/Geometria/Geometria_determinante/index.htm

donde con el applet descartes se hace un estudio geométrico del determinante. Este estudio fue en parte el preludio del artículo.

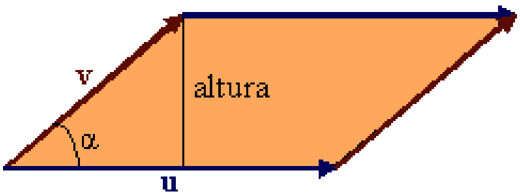
Volumen determinado por n vectores en $\mathbb{R}^m$

Longitud de un vector en $\mathbb{R}^m$

Sea u=(11,2,10) un vector de $\mathbb{R}^3$. Por el teorema de Pitágoras sabemos que su longitud es igual a $\sqrt{11^2+2^2+10^2}=15$, es decir, si A es la matriz (11 2 10), la longitud de su vector fila o su volumen (1-volumen) es

$$\text{vol}(A)=\sqrt{det(A.A^t)}$$

Área de dos vectores en $\mathbb{R}^m$



Si u y v son dos vectores en $\mathbb{R}^m$ el área al cuadrado del paralelogramo que definen viene dada por:

$(\text{long}(u))^2\cdot \text{altura}^2 = \|u\|^2\cdot(\|v\|\cdot \text{sen}(\alpha))^2=$
$=\|u\|^2\cdot\|v\|^2\cdot(1-\cos^2(\alpha)) =$
$=\|u\|^2\cdot\|v\|^2-\|u\|^2\cdot\|v\|^2\cdot\cos^2(\alpha)=$
$=u.u\ v.v\ \text{-}(u.v)^2 = \begin{vmatrix} u.u & u.v \\ v.u & v.v \end{vmatrix}$ que es el valor de $\det(A\cdot A^t)$ siendo A la matriz cuyas filas son los vectores u y v. Así pues cuando A es una matriz de 2 filas, el área del paralelogramo que definen sus vectores filas, es decir, el volumen de A (2-volumen) es:

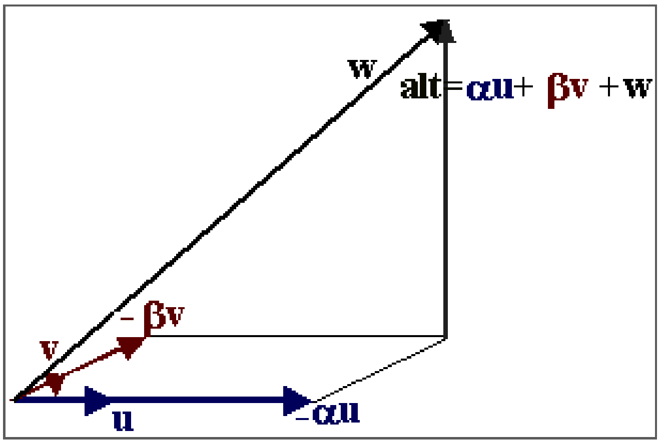
$$\text{vol}(A)=\sqrt{det(A\cdot A^t)}$$

Volumen de tres vectores en $\mathbb{R}^m$

Sea A la matriz cuyas filas son los vectores u, v y w de $\mathbb{R}^m$. El cuadrado del volumen del paralelepípedo determinado por las filas de A es

$$(\text{vol}(A))^2=(\text{área}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix})^2\cdot \text{altura}^2 = \begin{vmatrix} u.u & u.v & 0 \\ v.u & v.v & 0 \\ 0 & 0 & \text{alt}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u.u & u.v & u.alt \\ v.u & v.v & v.alt \\ alt.u & alt.v & alt.alt \end{vmatrix}$$

Y teniendo en cuenta que alt=α u + β v +w,



el determinante anterior es igual al

$$\det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{v} \\ \mathrm{w} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{v} \\ \mathrm{w} \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})=\det(\begin{pmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{v} \\ \mathrm{w} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{v} \\ \mathrm{w} \end{pmatrix}^t)$$

Concluimos por tanto que

$$\mathrm{vol}(A)=\sqrt{det(A \cdot A^t)}$$

Procediendo de esta forma, podemos definir el volumen de una matriz de orden nxm $A = \begin{pmatrix} \mathrm{u}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{u}_{n-1} \\ \mathrm{u}_n \end{pmatrix}$ como

$$\mathrm{vol}\begin{pmatrix} \mathrm{u}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{u}_{n-1} \\ \mathrm{u}_n \end{pmatrix}=\mathrm{vol}\begin{pmatrix} \mathrm{u}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{u}_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \text{altura}$$

El siguiente lema nos demuestra que la definición es correcta y posteriormente, por inducción sobre n, de igual manera que en el volumen de una matriz de 3 filas, se verá que

$$\mathrm{vol}(A)=\sqrt{det(A \cdot A^t)}$$

Lema: la altura existe y es única, la definición de volumen es correcta.
"Dada una matriz A nxm de rango n, existe un único vector de la forma:

$$\text{fila n de } A+ <\text{fila 1 de } A, ..., \text{fila n-1 de } A>$$

que es perpendicular a todos los vectores de <fila 1 de A, ..., fila n-1 de A > y se le llamará **altura de A respecto a B**, siendo B la matriz de todas las filas de A salvo la n^a. Además $det(A \cdot A^t) \neq 0$."

Demostración del lema:
Para ver si existe la altura, buscamos números $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$tales que

$$[u + (x_1, x_2, ..., x_{n-1}).B].B^t = (0, ..., 0)$$

donde u designa la fila n de A, es decir

$$(x_1, x_2, ..., x_{n-1}).B.B^t = -u.B^t$$

lo que es un sistema de n-1 ecuaciones con n-1 incógnitas y como el rango de B es n-1, aplicando la hipótesis de inducción podemos afirmar que el det(B.B^t) $\neq 0$ y el sistema tiene una única solución $\bullet$

Veamos ahora por inducción sobre el número de filas de *A* que

$$\mathbf{vol}(A) = \sqrt{det(A \cdot A^t)}$$

Según la definición dada sabemos que

volumen(A)=[volumen de la base B].[altura de A respecto a B]

siendo B la matriz formada por las n-1 primeras filas de A.

Y aplicando la hipótesis de inducción a B,

$(\mathrm{vol}(A))^2 \overset{definición}{=} (\mathrm{vol}(B))^2 \cdot$ altura^2 $\overset{h.\ inducción}{=}$

$$= \left| \begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & B.B^t & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{alt}^2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc|c} & & & f_1.\ \mathrm{alt} \\ & B.B^t & & \vdots \\ & & & f_{n-1}.\ \mathrm{alt} \\ f_1.\ \mathrm{alt} & \cdots & f_{n-1}.\ \mathrm{alt} & \mathrm{alt}^2 \end{array} \right|$$

siendo f_i la fila i-ésima de A y como alt $= f_n + \sum_{i=1\ldots n-1} x_i \cdot f_i$, este último determinante es igual a

$$\det = (\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & Id_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \\ x_1 & \cdots & x_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot A^t \cdot \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & Id_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \\ x_1 & \cdots & x_{n-1} & 1 \end{pmatrix}^t)$$

Con lo que se concluye que vol(A)=$\sqrt{det(A \cdot A^t)}$ •

Definición de volumen

Si A es una matriz de orden nxm se define el **volumen de A** como $\sqrt{\det(\mathrm{A} \cdot \mathrm{A}^t)}$ y se designará por $\|\mathrm{A}\|$. Si A es cuadrada, $\|\mathrm{A}\|$ coincide con el valor absoluto del detA. Obsérvese que cuando n>m el $\|\mathrm{A}\| = 0$.
Por lo visto anteriormente se sigue que

volumen(A)=[volumen de la base B].[altura de A respecto a B]

siendo B una matriz formada por n-1 filas de A.

Observar que el volumen **no considera la orientación**, el determinante sí: dos vectores en $\mathbb{R}^3$ definen distinta orientación dependiendo del semiespacio desde el que se observen.

Aplicaciones de la definición de volumen

Con esta definición de volumen se puede calcular de forma fácil y general la distancia y el ángulo entre dos subvariedades lineales afines.

Cálculo de distancias entre subvariedades lineales afines

Sea $P+ < d_1, ..., d_r >$ una subvariedad lineal afín S de dimensión r que pasa por el punto P y sea $P'+ < d'_1, ..., d'_s >$ una subvariedad lineal afín S' de dimensión s que pasa por el punto P'. Si r+k es el rango de la matriz cuyas filas son los directores de ambas subvariedades $d_1, ..., d_r, d'_1, ..., d'_s$ y A es una matriz de rango r+k cuyas filas son r+k de estos directores,

$$\text{La distancia entre S y S'} = \frac{\left\| \begin{matrix} P - P' \\ A \end{matrix} \right\|}{\| A \|}$$

Esta fórmula generaliza y unifica todas las fórmulas de distancias entre puntos, rectas y planos.
La intuición que la provocó fue que si podemos calcular volúmenes y áreas, con su cociente tendremos la altura, es decir, distancias.

Demostración:
Por el teorema de Pitágoras sabemos que el módulo de la altura de $\begin{pmatrix} \overrightarrow{u} \\ B \end{pmatrix}$ respecto a B es la mínima de las distancias de un punto de $< B >$ a $\overrightarrow{u}$:

$$alt = u + \overline{b} \perp B;\ \mathrm{d}^2(u, b) = \mathrm{d}^2(u + \overline{b}, b + \overline{b}) = \mathrm{d}^2(u + \overline{b}, \widetilde{b}) = (alt - \widetilde{b})^2 = alt^2 + \widetilde{b}^2 > alt^2$$

Veamos que $\dfrac{\left\| \begin{matrix} P - P' \\ A \end{matrix} \right\|}{\| A \|}$ **es la distancia de un punto de S a otro de S'**:

$$\frac{\left\| \begin{matrix} P - P' \\ A \end{matrix} \right\|}{\| A \|} = [\text{altura de} \begin{pmatrix} P - P' \\ A \end{pmatrix} \text{respecto a } A] =$$

$$= [\text{mínima distancia}(P - P',\ \text{punto de } A)] =$$

=distancia$(P - P',\ d + d')$, siendo d un vector de $< d_1, ..., d_r >$ y d' un vector de $< d'_1, ..., d'_s >$

dist$(P - P',\ d + d')$=dist$(P - d,\ P' + d'\ )$= dist (Punto de S, Punto de S')

Veamos que $\dfrac{\left\| \begin{matrix} P-P' \\ A \end{matrix} \right\|}{\left\| A \right\|}$ **es la mínima** distancia de un punto de S a otro de S':

Si hubiera otra menor se tendría que

$$\text{d}(P+d,\ P'+d') < \text{altura de } \begin{pmatrix} P-P' \\ A \end{pmatrix} \text{respecto a } A$$
$$\text{para cierto d en } < d_1, ..., d_r > \text{ y } d' \text{ en } < d'_1, ..., d'_s >$$

Pero

$$\text{d}(P+d,\ P'+d') = \text{d}(P-P',\ d'-d) = \text{ d}(P-P',\ \text{punto de} < A >)$$

que, por el Teorema de Pitágoras, no puede ser menor que la altura de $\begin{pmatrix} P-P' \\ A \end{pmatrix}$ respecto a A, con lo que se concluye la demostración.

Ángulo entre subvariedades lineales afines

Dadas dos subvariedades lineales afines $P+ < D >$ y $P+ < D' >$, se define el ángulo entre ellas como

$$\text{arcsen}\left(\frac{\left\| \begin{matrix} R \\ R' \end{matrix} \right\|}{\left\| R \right\| \cdot \left\| R' \right\|}\right)$$

Siendo R una base de $< D > \bigcap (< D > \bigcap < D' >)^{\perp}$
y R' una base de $< D' > \bigcap (< D > \bigcap < D' >)^{\perp}$
donde $< D > \bigcap (< D > \bigcap < D' >)^{\perp}$ y $< D' > \bigcap (< D > \bigcap < D' >)^{\perp}$ son $\neq 0$
en otro caso el ángulo es 0

Cuando $< D > \bigcap < D' > = 0$, la fórmula se convierte en:

$$\text{arcsen}\left(\frac{\left\| \begin{matrix} D \\ D' \end{matrix} \right\|}{\left\| D \right\| \cdot \left\| D' \right\|}\right)$$

No olvidar que suponemos que $\|D\|$ y $\|D'\|$ son $\neq 0$

Es fácil ver que esta definición coincide con la conocida para el ángulo entre dos rectas, entre recta y plano o entre dos planos. La definición no depende de las bases escogidas

En el caso de $< I > \neq 0$ (I designa una base de $< D > \bigcap < D' >$) se puede obtener el seno del ángulo α entre las subvariedades $P+ < D >$ y $P+ < D' >$ sin necesidad de calcular el espacio ortogonal a la intersección: sea B una base del complementario en $< D >$ de $< D > \bigcap < D' >$, y B' una base del complementario en $< D' >$ de $< D > \bigcap < D' >$,

$$\text{sen}\alpha = \frac{\left\| \begin{matrix} B \\ I \\ B' \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \, I \, \right\|}{\left\| \begin{matrix} B \\ I \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} B' \\ I \end{matrix} \right\|}$$

Demostración:

Es claro que $\left\| \begin{matrix} B \\ I \\ B' \end{matrix} \right\| = a \cdot b \left\| \begin{matrix} R \\ I \\ R' \end{matrix} \right\|$ siendo a el determinante del cambio de base de *(B,I)* a *(R,I)* y b el determinante del cambio de base de *(B',I)* a *(R',I)*. También $\left\| \begin{matrix} B \\ I \end{matrix} \right\|$ y $\left\| \begin{matrix} B' \\ I \end{matrix} \right\|$ coinciden respectivamente con $a \cdot \left\| \begin{matrix} R \\ I \end{matrix} \right\|$ y $b \cdot \left\| \begin{matrix} R' \\ I \end{matrix} \right\|$. Así pues teniendo en cuenta que R y R' son perpendiculares a I resulta:

$$\frac{\left\| \begin{matrix} B \\ I \\ B' \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \, I \, \right\|}{\left\| \begin{matrix} B \\ I \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} B' \\ I \end{matrix} \right\|} = \frac{\left\| \begin{matrix} R \\ I \\ R' \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \, I \, \right\|}{\left\| \begin{matrix} R \\ I \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} R' \\ I \end{matrix} \right\|} = \frac{\left\| \begin{matrix} R \\ R' \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \, I \, \right\| \cdot \left\| \, I \, \right\|}{\left\| \, R \, \right\| \cdot \left\| \, I \, \right\| \cdot \left\| \, R' \, \right\| \cdot \left\| \, I \, \right\|} = \frac{\left\| \begin{matrix} R \\ R' \end{matrix} \right\|}{\left\| \, R \, \right\| \cdot \left\| \, R' \, \right\|}$$

que es la definición de senα.

Si dim$(< \mathbf{D} > \bigcap (< \mathbf{D} > \bigcap < \mathbf{D}' >)^{\perp}) = \mathbf{dim}(< \mathbf{D}' > \bigcap (< \mathbf{D} > \bigcap < \mathbf{D}' >)^{\perp}) = \mathbf{1}$,

$$\mathbf{cos}\alpha = \frac{\left| \, R.R' \, \right|}{\left\| \, R \, \right\| \cdot \left\| \, R' \, \right\|}$$

Demostración:

$$(sen\alpha)^2 = \frac{\left\| \begin{matrix} R \\ R' \end{matrix} \right\|^2}{\left\| \, R \, \right\|^2 \cdot \left\| \, R' \, \right\|^2} = \frac{\left| \begin{matrix} R.R & R.R' \\ R'.R & R'.R' \end{matrix} \right|}{\left\| \, R \, \right\|^2 \cdot \left\| \, R' \, \right\|^2} = 1 - \frac{(R.R')^2}{\left\| \, R \, \right\|^2 \cdot \left\| \, R' \, \right\|^2} \Rightarrow$$

$$cos\alpha = \frac{\left| \, R.R' \, \right|}{\left\| \, R \, \right\| \cdot \left\| \, R' \, \right\|}.$$

Estudio y propiedades del volumen

Una fórmula

Sea $A=(a_{ij})$ una matriz nxm, con n$\leq$m, designamos por A^t su matriz traspuesta,

$$\boxed{\det(A\cdot A^t)=\text{Suma de los cuadrados de los menores de orden n de } A}$$

Antes de demostrarla veamos como se intuye con algunos ejemplos en $\mathbb{R}^3$:

$$(\text{Longitud de } A=(1\ 2\ 3))=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}=\sqrt{\det(A\cdot A^t)}$$

$$(\text{Área de } A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&4&5\end{pmatrix})=|Fila1\times Fila2|=\sqrt{\begin{vmatrix}2&3\\4&5\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1&3\\1&5\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1&2\\1&4\end{vmatrix}^2}$$

$$(\text{Vol de } A=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&-3&1\\3&1&-2\end{pmatrix})=|\det A|=\begin{array}{l}\nearrow\sqrt{\det(A\cdot A^t)}\\ \searrow\sqrt{\sum(menores\,de\,orden\,3\,de\,A)^2}\end{array}$$

Observaciones

1.-Si $A=\begin{pmatrix}\overrightarrow{u_1}\\\vdots\\\overrightarrow{u_n}\end{pmatrix}$, $A\cdot A^t=\begin{pmatrix}\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_1}&\dots&\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_n}\\\vdots&&\vdots\\\overrightarrow{u_n}\cdot\overrightarrow{u_1}&\dots&\overrightarrow{u_n}\cdot\overrightarrow{u_n}\end{pmatrix}$ simétrica, métrica en A

2.-Si el nº de filas de A es mayor que el de columnas (n>m), se le puede dar sentido a la fórmula, ya que el $\det(A\cdot A^t)$ es cero y el 2º miembro de la fórmula no tiene sumandos.

Pasos previos a la demostración de la fórmula

Sea A una matriz de orden nxm

1.-Si a una fila de A se le suma una proporcional a otra, $\det(A\cdot A^t)$ no varia. Pues si a la fila i de A se le suma la fila j multiplicada por a, se toma BA con

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{c}colj\\\uparrow\end{array}\\ fila\ i\leftarrow & \begin{pmatrix}1&&&\\&\ddots&0&\\0&a&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}\end{array}=B;\ \det B=1,$$

$$\det BA(BA)^t{=}\det BAA^tB^t{=}\det B\det AA^t\det B^t{=}\det AA^t$$

2.-Si a una fila de A se le suma una proporcional a otra, la suma de los cuadrados de todos los menores de orden n de A no varia. Como se deduce de las propiedades de los determinantes, ya que los menores son determinantes.

3.-Si el rango de A es distinto de n, det($A.A^t$)=0.

Si el rango de A no es n, una fila de A es combinación lineal de las otras y en $A\ .\ A^t$ sus filas son también linealmente dependientes.

4.- Si el rango de A es distinto de n, la suma de los cuadrados de todos los menores de orden n de A es cero. Pues no hay ningún menor de orden n distinto de cero.

Por tanto si el rango de A es distinto de n, det($A.A^t$)=la suma de los cuadrados de todos los menores de orden n de A y basta demostrar la fórmula para rango(A)=n.

5.-Si se permutan las filas o las columnas de A, no varía ninguno de los dos miembros de la fórmula.

Demostración de la fórmula, por inducción sobre r = n+m

Por lo anterior podemos suponer que el rango de A es n y

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1m} \\ 0 & & & & \\ \vdots & & B & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \text{ con } a_{11} \neq 0 \text{ y rango de } B = n-1$$

Es claro que para r =2 (primer caso) se verifica la igualdad, pasemos al caso general.

Teniendo en cuenta el paso previo 1 y siendo $\overline{A} = \begin{pmatrix} \text{vector altura de } A \text{ respecto a } B \\ 0 \quad\quad\quad\quad \\ \vdots \quad\quad B \quad\quad \\ 0 \quad\quad\quad\quad \end{pmatrix}$

se concluye que

$$\det(A.A^t) = \det(\overline{A}.\overline{A}^t) = \begin{vmatrix} \text{alt.alt} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B.B^t & \\ 0 & & & \end{vmatrix} = \text{alt.alt} \cdot \sum \begin{vmatrix} \text{menores} \\ \text{de orden} \\ \text{n-1 de } B \end{vmatrix}^2$$

Hemos aplicado la hipótesis de inducción en B

Pasemos a calcular el valor del segundo miembro de la fórmula. Sea $(a_1, a_2, ..., a_m)$ el vector altura de A respecto a B,

La suma de los cuadrados de todos los menores de orden n de *A* es igual a la suma de los cuadrados de todos los menores de orden n de $\overline{A}$ (paso previo 2) y

$$\sum\left|\begin{matrix} menores \\ de\,orden\ n \\ de\,\overline{A} \end{matrix}\right|^2 = \sum\left|\begin{matrix} menores \\ de\,orden\ n \\ de\,\overline{A}\,con\ a_1 \end{matrix}\right|^2 + \sum\left|\begin{matrix} menores \\ de\,orden\ n \\ de\,\overline{A}\ \text{sin}\ \ a_1 \end{matrix}\right|^2 =$$

$$= a_1^2 \sum\left|\begin{matrix} menores \\ de\,orden \\ n-1\,de\,B \end{matrix}\right|^2 + \sum\left|\begin{matrix} menores \\ de\,orden \\ n\ de\,C \end{matrix}\right|^2$$

donde $C = \overline{A}$ sin la 1^a col.

Observando que $(a_2, ..., a_m) = alt_2$ es el vector altura de de C respecto a B y aplicando la hipótesis de inducción a C tenemos que la última expresión es igual a

$$a_1^2 \sum\left|\begin{matrix} menores \\ de\,orden \\ n-1\,de\,B \end{matrix}\right|^2 + (alt_2)^2 \sum\left|\begin{matrix} menores \\ de\,orden \\ n-1\,de\,B \end{matrix}\right|^2 =$$

$=(\text{alt.alt})\sum\left|\begin{matrix} menores \\ de\,orden \\ n-1\,de\,B \end{matrix}\right|^2$ que es el valor que obtuvimos para $\det(A \cdot A^t)$.

Propiedades del volumen

1. Si a una fila se le suma una combinación lineal de las otras, el volumen no varía.

2. Si se permutan dos filas de la matriz el volumen no varía (forma simétrica en lugar de hemisimétrica).

3.a Si una fila se multiplica por un nº positivo, el volumen resulta multiplicado por ese mismo nº.

3.b Si se descompone una fila como suma de 2 vectores, el volumen no siempre es la suma de los 2 volúmenes resultantes, pero en algunos casos sí (cierta linealidad).

4. El volumen de n vectores unitarios y ortogonales es 1.

5. vol(AB)=vol(A). vol(B) si A es cuadrada.

6. vol(A) es igual al vol(A^t) sii A es cuadrada o en el caso de que los dos volúmenes sean 0.

7. Como la linealidad del volumen no es cierta no podemos desarrollar el volumen por los elementos de una fila pero como vol= [(n-1)-vol].altura sí se puede explicar un método para calcular volúmenes.

Las propiedades 1, 2, 3.a y 4 caracterizan al volumen como aplicación del conjunto de las matrices $\mathbb{M}_{nxm}(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^+$.

Estas mismas propiedades, cambiando la simetría por la hemisimetría, son propiedades características del determinante como aplicación de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}$.

Por lo visto anteriormente solo queda detallar los apartados **3.b** y **7**.

3.b-Cierta linealidad, linealidad en un subespacio de $\mathbf{R}^m$ de dimensión n. Si al descomponer un vector fila de A en dos sumandos cambiamos de dimensión, el volumen no será necesariamente la suma de los 2 n-volúmenes pero sí se cumple la linealidad en el siguiente caso descrito en la fila 1 por comodidad:

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & b_n \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & \Large 0 & \\ \vdots & \Large 0 & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{C}=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & \cdots & c_n \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & \Large 0 & \\ \vdots & \Large 0 & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{C}_1=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & \cdots & c_n \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & \Large 0 & \\ \vdots & \Large 0 & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Si D es de orden nxm al tomar BD y CD se está descomponiendo la fila 1 de la matriz $\mathrm{A}=(\mathrm{B}+\mathrm{C}_1)\mathrm{D}$ en dos sumandos y el resto de las filas de las matrices A, BD y CD son iguales en las 3 matrices pues bien

$$\mathbf{vol(A)=vol(BD)+vol(CD)}$$

ya que

$$\begin{gathered} \mathbf{vol(A)}= \mathrm{vol}((\mathrm{B}+\mathrm{C}_1)\mathrm{D}) \overset{*}{=} \mathrm{vol}(\mathrm{B}+\mathrm{C}_1).\mathrm{vol}(\mathrm{D}) \overset{*}{=} \\ = [\ \mathrm{vol}(\mathrm{B})+ \mathrm{vol}(\mathrm{C})].\mathrm{vol}(\mathrm{D}) = \\ =\mathrm{vol}(\mathrm{B}).\mathrm{vol}(\mathrm{D}) + \mathrm{vol}(\mathrm{C}).\mathrm{vol}(\mathrm{D}) \overset{*}{=} \\ = \mathbf{vol(BD)+vol(CD)} \end{gathered}$$

(*)B y C son cuadradas, con una sola fila distinta y con igual orientación, $\mathrm{B}+\mathrm{C}_1$ es cuadrada

7.- Un método para calcular un volumen consiste en hacer ceros por filas hacia abajo (Gauss filas) y luego se descompone el cuadrado del volumen en 2 sumandos, veámoslo con un ejemplo:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & -5 \end{matrix} \right\|^2 = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & -4 \end{matrix} \right\|^2 = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{matrix} \right\|^2 \text{(Gauss por filas)}$$

Descompongamos en dos sumandos:

$$= \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{matrix} \right\|^2 + \left\| \begin{matrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{matrix} \right\|^2 = \left\| \begin{matrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{matrix} \right\|^2 + \left\| \begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{matrix} \right\|^2 =$$

Repitamos el proceso:

$$= \left\| \begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{matrix} \right\|^2 + \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{matrix} \right\|^2 + 9 = \left\| \begin{matrix} 1 & 4 \end{matrix} \right\|^2 + \left\| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{matrix} \right\|^2 + 9=1+16+4+9=30$$

Índice

Ampliación del determinante a matrices no cuadradas