Capítulo 4

Calculadora y cálculo mental.

4.1 Uso de la calculadora.

El primer inconveniente al trabajar con calculadoras es la abundancia de marcas y que cada una tiene modelos distintos. Las siguientes actividades están planteadas a partir de características comunes de los modelos más usados. Se supone que estamos trabajando con calculadoras científicas. Si la tuya no está entre estas, consulta el manual de uso.

Las teclas de uso más habitual son:

- $\boxed{\text{Min}}$ introducir valores en la memoria
- $\boxed{\text{M+}}$ añade al valor en memoria el valor en pantalla
- $\boxed{\text{MR}}$ escribe en pantalla el número en memoria
- $\boxed{1/x}$ proporciona el inverso del número en pantalla
- $\boxed{+/-}$ cambia el signo del número en pantalla
- $\boxed{x^2}$ calcula el cuadrado del número en pantalla
- $\boxed{x^y}$ calcula el número en pantalla x elevado al número y
- $\boxed{\sqrt{}}$ calcula la raíz cuadrada del número en pantalla
- $\boxed{x^{1/y}}$ calcula la raíz de índice y del número x
- $\boxed{\text{EXP}}$ sirve para escribir un número en notación científica
- $\boxed{[(\cdots} \boxed{\cdots)]}$ indican los paréntesis

La tecla $\boxed{\text{SHIFT}} = \boxed{\text{INV}} = \boxed{2^{nd}}$ se utiliza para activar las funciones que aparecen en otro color, no escritas sobre la propia tecla sino en la parte superior de la misma.

Para empezar a entrenarnos, calcula primero sin la calculadora y luego comprueba con ella:

Ejercicio 4.1.1 *Con la tecla* $\boxed{x^y}$ *calcula:*

1. $2^3, 2^{-1}, 6^2, \left(\frac{2}{5}\right)^3, \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

2. $2^{3^3}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$

Ejercicio 4.1.2 *Escribe el valor que aparecerá en pantalla y luego compruebalo:*

1. $64 : 2\ x^2 = \sqrt{\ }$

2. $4 : 2 =\ x^2$

3. $4 : 2\ x^2 =$

Ejercicio 4.1.3 *Escribe la secuencia de teclas necesarias para hacer las siguientes operaciones:*

1. $(15 - 34'8)^2$

2. $152 \cdot \dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{5}\sqrt{6}$

3. $10 \cdot 5 + \frac{4}{2}$

4. $\dfrac{1}{23 - 4\sqrt{144}}$

5. $4 \cdot 3^2$

6. $(4 \cdot 3)^2$

Ejercicio 4.1.4 *Para usar la notación científica usamos la tecla* $\boxed{EXP}$*. Si escribimos la secuencia* $5'2$ $\boxed{EXP}$ 5 *significa que hemos introducido el número* $5'2 \cdot 10^5$*. Calcula usando* $\boxed{EXP}$

1. $\left(2 \cdot 10^3\right) \cdot (4 \cdot 10^4)$

2. $\left(3 \cdot 10^2\right)^2$

Ejercicio 4.1.5 *Completa la siguiente tabla y calcula la suma de las columnas usando las teclas de memoria*

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
3	2		
5	4		
6	3		
8	4		
9	2		
	$\sum f_i$	$\sum x_i \cdot f_i$	$\sum x_i^2 \cdot f_i$

Ejercicio 4.1.6 *Calcular los valores de los polinomios donde se indican:*

1. $p(x) = x^2 - 5x + 4$ en $x = 3$
2. $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 4$ en $x = 5$
3. $p(x) = 4x^4 - 2x^2 + 5x - 3$ en $x = -2$

Ejercicio 4.1.7 *Calcular la expresión*

$$\left(\frac{7 + \left(3\left((7-4)^2 + 2\right)\right)}{5}\right)^3$$

4.2 Cálculo mental.

El cálculo mental es una actividad que se adquiere ejercitándola. No hay que convencerte de su importancia, no sólo para las Matemáticas, sino en las innumerables ocasiones en las que necesitamos hacer un cálculo: al comprar, al leer el periódico, en los deportes, etc. Los ejercicios y actividades que vamos a realizar sirven para avanzar en el desarrollo de esta actividad.

Ejercicio 4.2.1 *Completa los rectángulos para obtener los resultados:*

1. 2 □ 5 = 10
2. 64 □ 0’1 =6’4
3. 5 □ 4 □ 6 = 14
4. 13 □ 13 □ 13 = 14
5. □ · 4 = 64

Ejercicio 4.2.2 *Obtén el número 10 utilizando el 9 cinco veces y las operaciones elementales +,-,·,:*

Ejercicio 4.2.3 *Encontrar el número más grande que se puede obtener con cuatro unos.*

Ejercicio 4.2.4 *Calcula mentalmente cada una de las operaciones (entre paréntesis te sugerimos una operación más sencilla que te puede servir de ayuda).*

1. $119 + 35$ $(120 + 35)$
2. 11×45 (10×45)

3. 1999×99 (2000×99 *ó* 1999×100)

Ejercicio 4.2.5 *Calcula mentalmente*

1. $1999^2 - 1998^2$

2. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 100$

Ejercicio 4.2.6 *Un amigo le dice a otro: "multiplica tu edad por 2, suma 5, multiplica por 50, piensa en un número de dos cifras y súmalo al resultado, resta el número de días de un año, suma 115 y dime el resultado". Acto seguido el 1º adivina la edad del 2º y el número de dos cifras que pensó. ¿Cómo lo explicas?*

Ejercicio 4.2.7 *Un mago entrega a un espectador dos dados y tras ponerse de espaldas, le pide que los tire y que, con los resultados, realice las siguientes operaciones: multiplica una cara por 5, súmale al resultado 12, multiplica el resultado por 2, suma la otra cara, suma 15 al resultado. El mago le dice al espectador los dos números que salieron, ¿cómo es posible?*

Ejercicio 4.2.8 *Otro de magos. El mago entrega tres dados a un espectador y le pide que los ponga uno sobre otro sin que lo vea el mago. Una vez hecho esto, el mago observa el montón y le dice inmediatamente cuánto es la suma de las caras tapadas, las que no se ven.*

Ejercicio 4.2.9 [1] *Y el último de magos. Un mago, matemático, se presenta al público como una persona que posee una gran memoria, capaz de recordar un total de 80 números y el lugar que ocupan en una tabla. Alguien del público tapará un número del tablero y el mago al volverse descubrirá inmediatamente el número tapado. El tablero es*

35	23	80	32	17	46	44	34
22	41	20	81	68	56	61	78
16	59	77	63	50	11	79	75
62	13	37	82	58	57	10	39
9	38	36	26	27	15	72	24
60	48	53	70	14	33	12	73
42	3	71	67	8	51	69	55
50	49	2	31	54	5	29	74
19	7	64	16	1	30	28	18
6	25	4	65	52	40	45	62

[1] Los números están distribuidos siguiendo un patrón. Al contar en diagonal cuatro casillas hacia arriba sumamos ocho unidades, si vamos cuatro casillas hacia abajo restamos ocho unidades.

Ejercicio 4.2.10 ***Juego del 100:***
Construimos un cuadrado 10×10 *y numeramos las casillas del 1 al 100. Cada equipo (compuesto por dos jugadores) lanza un dado 4 veces y anota los resultados. Tacha todos los números del cuadrado que obtiene enlazando con las operaciones elementales +,-,·,: los números obtenidos con el dado. Por ejemplo si han salido los números 3, 3, 2, 5 se pueden tachar los números* $(3 \cdot 3) + (2 \cdot 5) = 19$ *ó* $(3 + 3 + 2) \cdot 5 = 40$*, etc. Gana el equipo que tacha más números.*

Ejercicio 4.2.11 ***6 operaciones:***
En un tablero 4×4 *se escriben 16 números enteros de 2 cifras. Por ejemplo:*

8	*35*	*16*	*6*
15	*14*	*20*	*11*
9	*40*	*12*	*29*
18	*35*	*50*	*24*

El objetivo del juego consiste en obtener los números que aparecen en el tablero realizando dos operaciones con los puntos que se obtengan al lanzar tres dados. Por ejemplo, si han salido en los dados 3, 3, 5 puede hacer 3(3+5)=24, tachando el número 24 de la esquina inferior derecha.

Reglas del juego: (jugadores individuales o grupos)

- Se echa a suertes para ver quien empieza.
- Se lanzan los dados para obtener tres números.
- Se realizan dos operaciones (aritméticas o no, $\sqrt{}$, etc) apuntándolas en un papel.
- Si un jugador no puede obtener el número después de 2 minutos, pasa el turno al siguiente jugador.
- Gana el jugador que tacha más números si se tachan todos o al pasar cierto período de tiempo.

4.3 Srinivasa Ramanujan

Hijo de un contable y de un ama de casa nace el 22 de Diciembre de 1887. A los cinco años se divertía entreteniendo a sus amigos con teoremas y fórmulas, repitiendo los valores de π y de $\sqrt{2}$ con cualquier número de cifras decimales. Su primer contacto con la matemática formal lo tuvo a los 15 años. Primero se dedicó a la geometría con notables resultados como medir

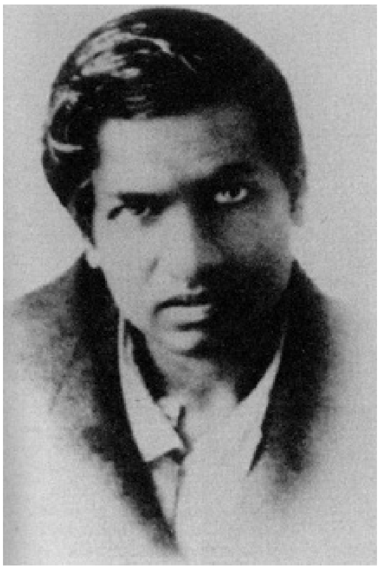

Figura 4.1: Srinivasa Ramanujan

la longitud del círculo ecuatorial equivocándose en unos pocos pies. Posteriormente se dedica al álgebra y decía que la diosa Namakkal le inspiraba las fórmulas en sueños. Al levantarse de la cama escribía resultados y los comprobaba. Comenzó a trabajar en la Compañía del Puerto de Madrás.

En 1913 escribe una carta a G. H. Hardy, del Trinity College de Cambridge:

Apreciado Señor:

Soy un oficinista con un salario de sólo 20 libras anuales. Tengo 23 años y no he recibido educación universitaria. Qerría pedirle que repasara los trabajos aquí incluidos. Me gustaría publicarlos pero soy pobre. Excúseme por las molestias causadas. Quedo a su entera disposición.

Una de las fórmulas que acompañaban la carta era

$$\frac{1}{1+\frac{e^{2\pi\sqrt{5}}}{1+\frac{e^{4\pi\sqrt{5}}}{1+\cdots}}} = \left[\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[5]{5^{\frac{3}{4}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}-1}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right] e^{\frac{2\pi}{\sqrt{5}}}$$

Hardy comentaba: "Nunca había visto nada parecido, sólo podían ser escritas por un matemático de la más alta categoría". Consigue una beca de 250 libras para trabajar en Cambridge tras la inicial oposición de su madre. Esta le dió el permiso cuando tuvo una aparición de la diosa Namagiri que le ordenó no interponerse en el camino de su hijo.

Hardy contaba de él que tenía una memoria extraordinaria. Una vez, viajaban en el taxi número 1729 y Hardy comentó que era un número soso.

Ramanujan contestó que no, es muy interesante, pues es el número más pequeño que se puede escribir como suma de dos cubos de dos maneras distintas

$$\begin{aligned} 1729 &= 10^3 + 9^3 \\ 1729 &= 12^3 + 1^3 \end{aligned}$$

En la primavera de 1917 contrae la tuberculosis y en 1919 vuelve a la India con una reputación como ningún indio había disfrutado anteriormente. Es considerado como uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos, al nivel de Euler, Gauss, etc. Nos dejó unos 4000 teoremas. Otra fórmula suya era

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2}} = \frac{1103}{99^2} + \frac{27493}{99^6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{4^2} + \frac{53883}{99^{10}} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4^2 \cdot 8^2} + \cdots$$

que se ha usado para obtener dos mil millones de cifras de π.[10]