Capítulo 5

Resolución de problemas.

5.1 Modelo de Guzmán.

Para resolver los problemas en Matemáticas podemos seguir el siguiente modelo, llamado modelo de Guzmán.

1. Familiarización con el problema.
2. Búsqueda de estrategias.
3. Llevar adelante la estrategia.
4. Revisar el proceso y sacar consecuencias de él.

Al comienzo, en la **familiarización**, debemos actuar sin prisas, pausadamente y con tranquilidad. Hay que tener una idea clara de los elementos que intervienen: datos, relaciones e incógnitas. Se trata de entender.

Una vez que se ha entendido el problema pasamos a **buscar estrategias** que nos permiten resolverlo. Apuntamos las ideas que nos surgen relacionadas con el problema.

Tras acumular varias estrategias **llevamos a cabo la estrategia escogida**, con confianza y sin prisas. Si no acertamos con el camino correcto volvemos a la fase anterior y reiniciamos el trabajo.

Al llegar a la solución queda la fase más importante, **revisión del proceso** y extraer consecuencias de él. Debemos reflexionar sobre el camino seguido, si podemos extender estas ideas a otras situaciones.

Trata de llevar a cabo el modelo anterior en los problemas posteriores y buena suerte. [11]

Miguel de Guzmán nació en Cartagena en Enero de 1936. Al poco de nacer, su padre Marino de Guerra, fue asesinado en los tristes sucesos de Agosto de 1936. Estudió Filosofía en Alemania (1961), Matemáticas en

Figura 5.1: Miguel de Guzmán

Madrid (1965) y se doctoró en Chicago en el 68. Ha sido profesor en universidades de Chicago, St. Louis, Princeton (EE.UU.), Suecia y Brasil y era catedrático de Análisis Matemático de la Complutense de Madrid y Académico de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales desde 1982. Fue presidente de la Comisión Internacional de Educación Matemática (ICMI) de 1991 a 1998. Es autor de numerosos libros técnicos (publicados en importantes editoriales internacionales) y de divulgación (traducidos al inglés, chino, finlandés, francés y portugués), articulista y conferenciante.

Fue un gran matemático y un gran profesor pero ha sido mucho más. Era la referencia obligado de los medios de comunicación ante cualquier tema o noticia que tuviera que ver con las matemáticas o con su enseñanza en nuestro país.

5.2 Tipos de problemas.

5.2.1 Resolución gráfica.

Muchas veces, la construcción de un gráfico que refleje las condiciones y los datos del enunciado conduce directamente a la solución del problema.

Ejemplo 5.1 *Ignacio ha comprado un ordenador. Lo paga del siguiente modo: la mitad de su importe, en el momento de llevárselo; los dos tercios del resto, al cabo de un mes; y las 35000 ptas restantes, al cabo de dos meses, ¿cuánto ha costado el ordenador?.*

Llamando x al coste del ordenador $\frac{1}{3}\frac{1}{2}x = 35000 \Rightarrow x = 210000$

5.2.2 Ensayo-error.

Consiste en experimentar con posibles soluciones hasta dar con la correcta. Para ello seguimos los siguientes pasos:

- Escogemos una posible solución.
- Probamos si esta solución satisface las condiciones del problema.
- Modificamos la solución escogida en función del resultado obtenido y repetimos el proceso hasta obtener la solución correcta.

Ejemplo 5.2 *Encuentra dos números primos consecutivos cuyo producto sea* 437*.*

Vamos escribiendo la lista de números primos y probamos

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$$

escogiendolos de dos en dos hasta encontrar que $19 \times 23 = 437$

5.2.3 Razonamiento inverso.

Esta estrategia se aplica en la resolución de problemas en los que conocemos el resultado final y queremos determinar un valor inicial o una serie de operaciones que nos conduzcan hasta él.

El método consiste en tomar el resultado como punto de partida e ir retrocediendo hasta llegar a la posición inicial.

Ejemplo 5.3 *Halla un número cuyo cuadrado exceda en 25 unidades a 416.*

Hay que buscar un número cuyo cuadrado sea $416 + 25 = 441$ y este tiene por raíz $\sqrt{441} = 21$

5.2.4 Organización de la información.

En muchos problemas, la realización de un esquema o tabla sobre los que disponer las condiciones y los datos del enunciado puede abrirte el camino para abordar su resolución.

Ejemplo 5.4 *Dos coches parten simultaneamente de dos ciudades A y B, distantes 160 km, al encuentro uno del otro. Sus velocidades son $v_A = 85km/h$ y $v_B = 75km/h$. Halla en qué punto se cruzarán y el tiempo invertido en ello.*

5.2.5 Descomposición del problema.

A veces es dificil ver la relación entre los datos y las incógnitas del problema. En estos casos, una de las estrategias que ofrece más posibilidades de éxito es la descomposición del problema en problemas más sencillos.

Ejemplo 5.5 *Hallar el área de un hexágono regular de lado l.*

En lugar de trabajar con un hexágono lo descomponemos en seís triángulos equiláteros, y hallar el área de estos es más sencillo.

5.2.6 Simplificación y busqueda de regularidades.

En ocasiones, la simplificación de datos o de las condiciones del problema proporciona un nuevo punto de vista para su resolución. Ese nuevo punto de vista surge de la existencia de regularidades que permanecían ocultas antes de proceder a la simplificación.

Ejemplo 5.6 *Calcula la suma de los 100 primeros números naturales.*[1]

Gauss resolvió este ejercicio con sólo 5 años. Se percató de que si reordenaba la serie

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$$

escribiendo por parejas

$$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98)$$

todas las parejas sumaban lo mismo 101 y que tenía 50 parejas, por lo tanto

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 = 101 \cdot 50 = 5050$$

5.2.7 Experimentación con la posible solución.

Este método, muy útil en geometría, consiste en suponer una posible solución del problema que nos plantea y verificar que ésta satisface las condiciones del enunciado. Si no es la solución puede que nos conduzca a la solución.

Ejemplo 5.7 *De todos los rectángulos, cuyos lados son múltiplos de 10, de área $100m^2$, determina cuál es el de menor perímetro.*

Un rectángulo de lados x, y tiene de área $x \cdot y = 100$ y de perímetro $2x+2y$. Despejamos una variable y sustituimos en la expresión del perímetro $y = \dfrac{100}{x} \Rightarrow p = 2x + 2 \cdot \dfrac{100}{x} = 2 \cdot \dfrac{x^2 + 100}{x}$

En una tabla damos valores a x y calculamos el perímetro y el otro lado y

[1] Ver la biografia de Gauss al final del capítulo.

x	p	y
10	40	10
20	50	5
30	100	no
...	...	...

La posible solución parece que es $x = 10, y = 10$.

5.2.8 Búsqueda de un contraejemplo.

Se utiliza para demostrar la falsedad de un enunciado matemático. Puesto que un enunciado expresado de forma general ha de cumplirse siempre, si en un caso particular (contraejemplo) no se cumple, el enunciado ya no es válido.

Ejemplo 5.8 *¿Es cierta la propiedad? Los números $2^n + 3, n \in N$ son primos.*

Si a n le damos valores $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ encontramos que para $n = 5 \Rightarrow 2^5 + 3 = 35 = 5 \cdot 7$ que no es primo.

5.2.9 Reducción al absurdo.

Se usa para demostrar afirmaciones. Consiste en suponer la falsedad de lo que se quiere demostrar y llegar así a una contradicción.

Ejemplo 5.9 *Demuestra que $\sqrt{2}$ no es un número racional.*

Supongamos que es racional, $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, siendo a, b primos entre sí. Elevando al cuadrado $2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$, es decir, a^2 es par y también lo será a, $a = 2m$ y sustituyendo $(2m)^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2m^2$ y usando el mismo razonamiento de antes también b es par, lo que está en contradicción con a, b sean primos entre sí. Esta contradicción surge de suponer que $\sqrt{2}$ es racional.

5.3 Problemas típicos de Matemáticas.

Ejercicio 5.3.1 *Una cabra está atada por una cuerda de seis metros en una esquina exterior de un redil rectangular de cuatro por cinco metros, rodeado por un campo de hierba. ¿En qué área puede pastar la cabra?*

Ejercicio 5.3.2 *Cuatro números primos tienen la siguiente estructura*

$$AA - BAB - BACD - AAAC$$

sabiendo que cada letra representa una cifra y que a letras iguales corresponden cifras iguales, ¿cuáles son esos números?

Ejercicio 5.3.3 *Todas las calles de un pueblo son rectas, sin que haya dos paralelas. Al emplazar una farola en cada cruce, se colocaron 66 farolas. ¿Cuántas calles tenía el pueblo como mínimo?*

Ejercicio 5.3.4 *Calcula el juego de cuatro pesas que es necesario tener para poder pesar en una balanza con dos platos cualquier cantidad entera desde uno hasta cuarenta kilos.*

Ejercicio 5.3.5 *A los números como 34543, que se leen lo mismo de derecha a izquierda que de izquierda a derecha se les llama capicúas. Demostrar que todos los capicúas de cuatro cifras son divisibles por 11.*

Ejercicio 5.3.6 *¿Que es más grande* $\left(1+x^2\right)\cdot\left(1+y^2\right)\cdot\left(1+z^2\right)$ *ó* $8\cdot x\cdot y\cdot z$*?*

Ejercicio 5.3.7 *Considera la serie de los números impares* $1, 3, 5, 7, \ldots$ *¿cuánto vale la suma de los k primeros?*

Ejercicio 5.3.8 *Cuatro vacas negras y tres vacas marrones dan tanta leche en cinco días como tres vacas negras y cinco marrones en cuatro días. ¿Qué clase de vaca es la mejor lechera, la negra o la marrón?.*

Ejercicio 5.3.9 *Para numerar las páginas de un libro se necesitan 2989 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el libro?*

Ejercicio 5.3.10 *Una jarra pesa igual que una botella y un vaso. Una botella pesa lo mismo que un vaso y un plato. Dos jarras pesan lo mismo que tres platos. ¿Cuántos vasos pesarán lo mismo que una botella?*

Ejercicio 5.3.11 *Ciento un jugadores han participado en el torneo de Wimbledon del presente año. ¿Cuantos encuentros se jugaron en total antes de coronar al campeón?. Se juega a una sola vuelta.*

Ejercicio 5.3.12 *Si multiplicamos dos números de dos cifras, en general su producto es diferente del que resulta si hacemos sus imágenes en un espejo. Así* $25 \times 43 \neq 34 \times 52$*. Sin embargo, existen algunas parejas (especulares) tales que su producto es igual al de sus imágenes. Por ejemplo:* $23 \times 64 = 46 \times 32$*. Trata de encontrar todas las parejas especulares.*

Ejercicio 5.3.13 ***Productos casi cuadrados.*** *Observa que:*

$$\begin{gathered}
1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 = 5^2 - 1 \\
2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120 = 11^2 - 1 \\
3 \times 4 \times 5 \times 6 = 360 = 19^2 - 1 \\
4 \times 5 \times 6 \times 7 = 840 = 29^2 - 1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}$$

¿Ocurrirá siempre así?

Ejercicio 5.3.14 *¿Cuánto vale* $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$*?*

Ejercicio 5.3.15 *A pesar de las apariencias los números*

$$x=\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}} \qquad y=\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$$

son enteros. Intenta encontrarlos sin calculadora.

Ejercicio 5.3.16 *Las saetas de un réloj coinciden a las doce, ¿a qué hora vuelven a coincidir de nuevo?*

Ejercicio 5.3.17 ***Curiosidad numérica 1.*** *Empieza con dos números cualquiera y comprueba que siempre funciona, ¿por qué?*

$$\begin{gathered}1+1+2+3+5+8=4\cdot 5\\ 2+5+7+12+19+31=4\cdot 19\\ 3+7+10+17+27+44=4\cdot 27\end{gathered}$$

Ejercicio 5.3.18 ***Curiosidad numérica 2.*** *¿Funciona siempre así? ¿Por qué?*

$$\begin{gathered}2^3-2=1\cdot 2\cdot 3\\ 3^3-3=2\cdot 3\cdot 4\\ 4^3-4=3\cdot 4\cdot 5\end{gathered}$$

Ejercicio 5.3.19 *Calcular* $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots-1998^2+1999^2$

Ejercicio 5.3.20 *Sabiendo que* $\left(a^2+b^2\right)^3=\left(a^3+b^3\right)^2$ *y* $a\cdot b\neq 0$ *calcular* $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$

Ejercicio 5.3.21 *Calcular n:* $\left(10^{12}+25\right)^2-\left(10^{12}-25\right)^2=10^n$

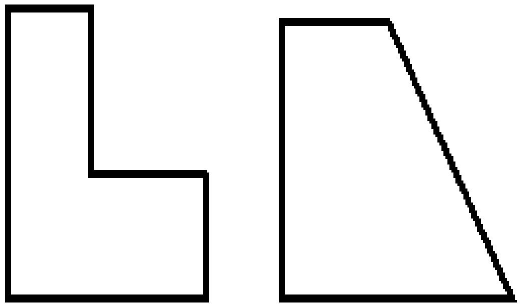
Ejercicio 5.3.22 *Se desea encontrar una moneda falsa, que pesa menos que las otras, entre un total de 8 utilizando una balanza de dos platos. ¿Es posible hacerlo con sólo dos pesadas? ¿Y si se tratará de encontrarla entre un total de 24, con sólo tres pesadas?*

Ejercicio 5.3.23 *Buscamos una bola de billar, entre un total de nueve, que pesa menos que el resto, que pesan todas lo mismo. ¿Puedes ayudarnos? Hay que conseguirlo con una balanza y dos únicas pesadas.*

Ejercicio 5.3.24 *Un padre y sus dos hijos deben cruzar un río en una barca que sólo puede soportar 100 kg. El padre pesa 100 kg y los hijos 50 cada uno. ¿Cómo lo deben hacer?.*

Ejercicio 5.3.25 *En una confitería reciben 10 cajas, aparentemente iguales, con 50 bombones cada una. El fabricante advierte posteriormente, que por un error, una de las cajas es distinta pues cada bombón pesa 11 grs en lugar de 10. ¿Cómo averiguar, en una sóla pesada, cuál de las 10 cajas es diferente?. Las cajas se pueden abrir.*

Ejercicio 5.3.26 *Un padre desea dividir los terrenos de la figura entre sus cuatro hijos, de manera que a cada uno les toque la misma forma geométrica. ¿Cómo puede hacerlo?*



Dividir cada uno en 4 partes iguales

Ejercicio 5.3.27 *Si* $x^2 + x + 1 = 0$ *calcular el valor*

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2+\cdots+\left(x^{27}+\frac{1}{x^{27}}\right)^2$$

5.4 Johann Karl Friedrich Gauss

Figura 5.2: El Principe de las Matemáticas

Nace en Brunswick, Alemania, en 1777 y muere en Gotinga en 1855. Considerado uno de los tres mayores matemáticos junto a Arquímedes y Newton, a veces se le nombre como el Principe de las Matemáticas.

Fue un niño prodigio en matemáticas. Un día su maestro, de costumbres rutinarias, para mantener la clase en silencio y atareada les pidió sumar todos los números del 1 al 100 (Ver el ejemplo 5.6). Inmediatamente Gauss mostró su pizarra con el resultado, 5050. Tenía 5 años.

Gracias a su inteligencia superdotada el duque de Brunswick decide costearle sus estudios. Los descubrimientos más importantes en matemáticas de Gauss fueron:

- el método de los mínimos cuadrados.
- la construcción del polígono de 17 lados con regla y compás.
- el Teorema Fundamental del Algebra: un polinomio en el cuerpo de los complejos tiene tantas raíces como el grado.
- El Teorema Fundamental de la Aritmética: todo número natural se puede representar como producto de primos y de forma única

En Brunswick se levantó una estatua en su honor sobre un pedestal en forma de estrella de 17 puntas, en celebración de su descubrimiento. [12]