Definición

Dos figuras son equivalentes cuando tienen igual área pero distinta forma.

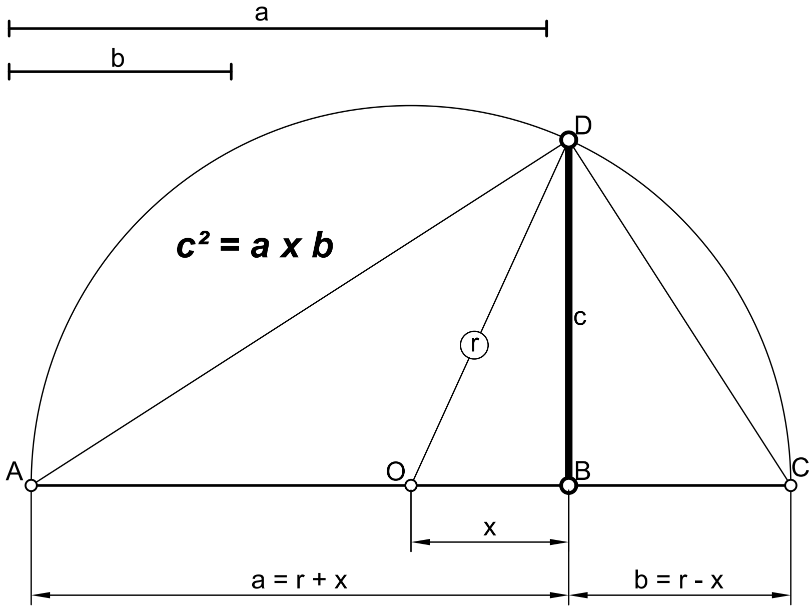
El estudio de las equivalencias desde el punto de vista gráfico, tiene su razón de ser histórica, al transformar cualquier figura plana en un cuadrado (obtención de la cuadratura), cuya área es más fácil de calcular. Hoy día con los medios informáticos, esto ya no tiene tanto sentido, aunque su estudio es interesante por qué la determinación de figuras equivalentes, supone desarrollar destrezas de razonamientos geométricos, y en definitiva posibilitar que el alumno adquiera hábitos de pensamiento abstracto, que le sirvan en cualquier disciplina.

Preliminar. Media proporcional

Antes de abordar el estudio de las equivalencias, veremos el concepto de media proporcional, base de todas las construcciones gráficas de equivalencias.

*Un número, **c**, es media proporcional de otros dos, **a** y **b**, cuando su cuadrado es igual al producto de los otros dos, es decir:* $c^2 = a \times b$.

Las construcciones gráficas de esta expresión algebraica, están basadas en dos teoremas relacionados con el triángulo rectángulo:



El teorema de la altura: *la altura correspondiente a la hipotenusa es media proporcional entre las proyecciones ortogonales de los catetos sobre dicha hipotenusa*.

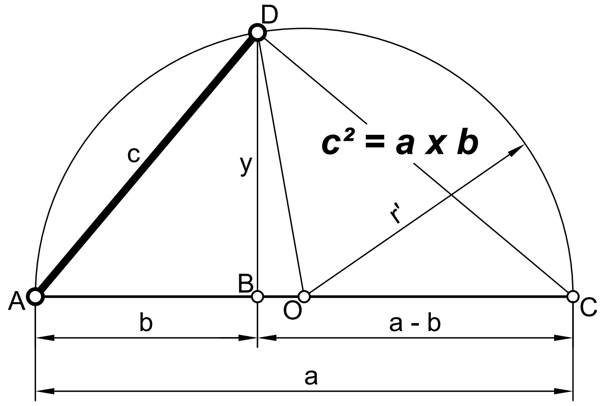
La construcción grafica es:

1. Sobre una recta se llevan los dos segmentos dados: a = $\overline{AB}$ y b = $\overline{BC}$ sumados, obteniendo el segmento $\overline{AC}$.
2. Se dibuja la semicircunferencia de diámetro $\overline{AC}$.
3. Se dibuja la perpendicular al segmento $\overline{AC}$ por el punto B, que corta a la semicircunferencia en el punto D. El segmento media proporcional es él $\overline{BD}$ = c.

Demostración:
Aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos fijandonos en el triángulo rectángulo OBD, que:

$r^2 = c^2 + x^2$; despejando c^2, se tiene $c^2 = r^2 - x^2 = (r + x)\bullet(r - x) = a\bullet b$ (c.s.q.d)

El teorema del cateto: *todo cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección ortogonal sobre dicho cateto*.



La construcción grafica es:

1. Sobre una recta se llevan los dos segmentos dados, a = AC y b = AB, obteniendo el segmento AC, es decir restandose.
2. Se dibuja la semicircunferencia de diámetro AC.
3. Se dibuja la perpendicular al segmento AC por el punto B, que corta a la semicircunferencia en el punto D. El segmento media proporcional es él AD = c.

Demostración:
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ABD: $c^2 = y^2 + b^2$ (1)

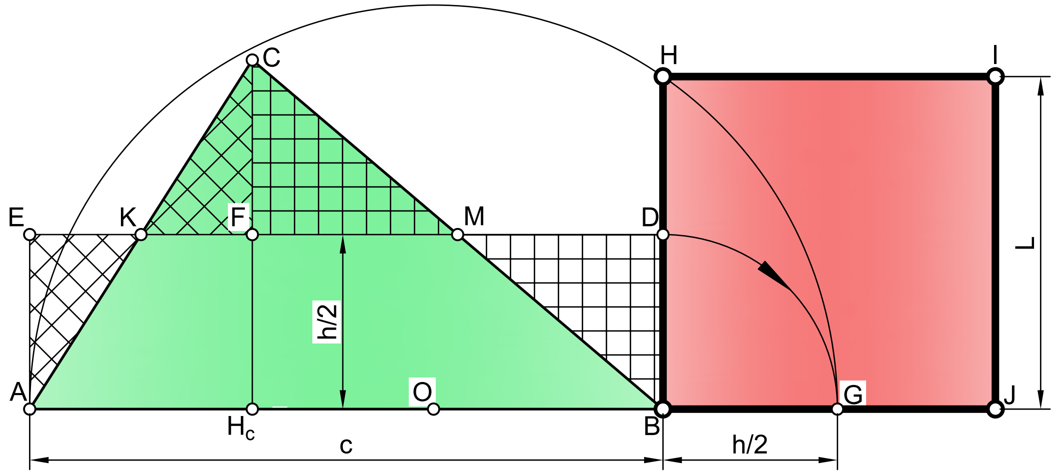
por la demostración del teorema de la altura, tenemos que: $y^2 = AB\bullet BC = b\bullet(a - b)$ (2)

Sustituyendo la expresión (2) en la (1) tenemos: $c^2 = b\bullet(a - b) + b^2 = a\bullet b - b^2 + b^2 = a\bullet b$ (c.s.q.d)

El procedimiento más utilizado en las cuadraturas es aplicando el teorema de la altura.

En todos los problemas de cuadraturas, lo que se persigue es dibujar el cuadrado equivalente a la figura de partida, ya sea ésta poligonal, curvilínea o mixta, por ello se busca que el área de la figura de partida, sea una expresión algebraica del producto de dos magnitudes, en nuestro caso segmentos, para obtener el lado del cuadrado, que está elevado al cuadrado, valga la redundancia. De todo lo dicho, es fundamental el conocimiento de las áreas de las principales figuras planas.

Vamos a comenzar nuestro trabajo con el estudio de las poligonales.



Cuadrado equivalente a un triángulo.

Sea el triángulo ABC.

1. Se determina la mitad de su altura, $\overline{FHc}$ = h/2.
2. A partir del vértice B, se lleva la mitad de la altura, obteniendo el segmento $\overline{AG}$.
3. Se dibuja la semicircunferencia de diámetro $\overline{AG}$.
4. Por el extremo B se dibuja una perpendicular al segmento $\overline{AG}$, que corta a la semicircunferencia en el punto H. El segmento $\overline{BH}$ es el lado, L, del cuadrado equivalente al triángulo ABC.

Lo que se ha hecho es aplicar el teorema de la altura a los segmentos, c (base del triángulo) y $\overline{BG}$ = h/2 (mitad de la altura), pues el área del triángulo es

(base x altura)/2 = (c x h)/2 = agrupando terminos = c x (h/2) = L² de donde, recordando la expresión dada de la media proporcional, a x b = c² y comparándola con la del área de nuestro triángulo, se tiene que:

base = $\boxed{\text{a = } \mathbf{c}}$, altura del triángulo/2 = $\boxed{\text{b = } \mathbf{h/2}}$ y $\boxed{\text{c (resultado) = } \mathbf{L.}}$

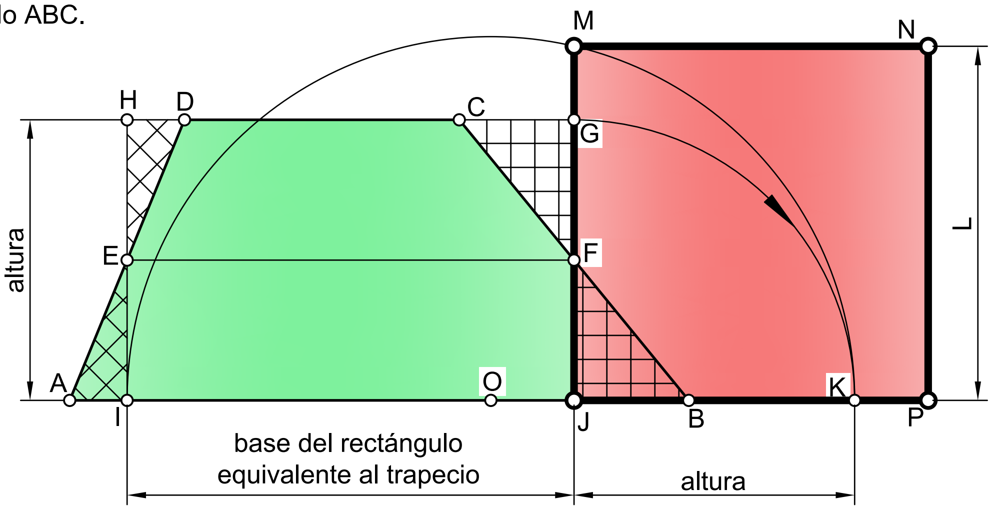
De esta construcción se puede también deducir, dibujando el rectángulo ABDE, de igual base que el triángulo y altura la mitad:

El rectángulo ABDE tiene la misma área que el triángulo, pues los triángulos AEK y KFC son iguales, pues el punto K es el medio del lado AC y además los catetos $\overline{AE}$ y $\overline{FC}$ son iguales a la mitad de la altura del triángulo. Lo mismo se puede deducir de los triángulos BDM y MFC. De todo esto se tiene también el procedimiento para cuadrar cualquier rectángulo e incluso cualquier rombo y romboide, pues sus áreas valen, **base x altura**, aplicandose la media proporcional, que en este caso resulta igual a la del triángulo ABC.

Cuadratura de un trapecio.

Sea el trapecio ABCD

En este caso, teniendo en cuenta lo visto con el triángulo anterior, se tiene que dibujando la paralela media EF, los triángulos AIE y FHD son iguales, por las mismas razones que las indicadas con el triángulo. Igual sucede con los triángulos BJF y FGC, que son iguales.



Todo esto indica que el trapecio ABCD tiene la misma área que el rectángulo IJGH, cuya cuadratura se realiza aplicando la media proporcional entre su base, IJ (la del rectángulo equivalente) y la altura, como se ha visto con el triángulo anterior. Así se ha obtenido el cuadrado equivalente JPNM.

NOTA 1: En la cuadratura del trapecio, también se puede utilizar la formula de sul área, pero desde el punto de vista gráfica, es más sencillo hacerlo así.

NOTA 2: el cuadrado y el trapecio tienen un triángulo común, el BJF. Al sombrear se ha preferido adoptar el color del cuadrado solución

Definición

Dos figuras son equivalentes cuando tienen igual área pero distinta forma.

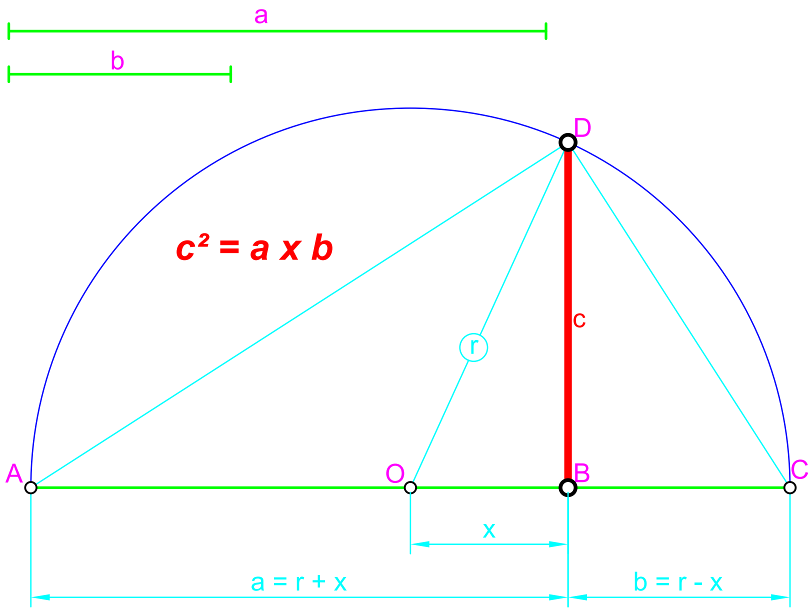
El estudio de las equivalencias desde el punto de vista gráfico, tiene su razón de ser histórica, al transformar cualquier figura plana en un cuadrado (obtención de la cuadratura), cuya área es más fácil de calcular. Hoy día con los medios informáticos, esto ya no tiene tanto sentido, aunque su estudio es interesante por qué la determinación de figuras equivalentes, supone desarrollar destrezas de razonamientos geométricos, y en definitiva posibilitar que el alumno adquiera hábitos de pensamiento abstracto, que le sirvan en cualquier disciplina.

Preliminar. Media proporcional

Antes de abordar el estudio de las equivalencias, veremos el concepto de media proporcional, base de todas las construcciones gráficas de equivalencias.

*Un número, **c**, es media proporcional de otros dos, **a** y **b**, cuando su cuadrado es igual al producto de los otros dos, es decir: **$c^2 = a \times b$**.*

Las construcciones gráficas de esta expresión algebraica, están basadas en dos teoremas relacionados con el triángulo rectángulo:



El teorema de la altura: *la altura correspondiente a la hipotenusa es media proporcional entre las proyecciones ortogonales de los catetos sobre dicha hipotenusa*.

La construcción grafica es:

1. Sobre una recta se llevan los dos segmentos dados: a = $\overline{AB}$ y b = $\overline{BC}$ sumados, obteniendo el segmento $\overline{AC}$.
2. Se dibuja la semicircunferencia de diámetro $\overline{AC}$.
3. Se dibuja la perpendicular al segmento $\overline{AC}$ por el punto B, que corta a la semicircunferencia en el punto D. El segmento media proporcional es él $\overline{BD}$ = c.

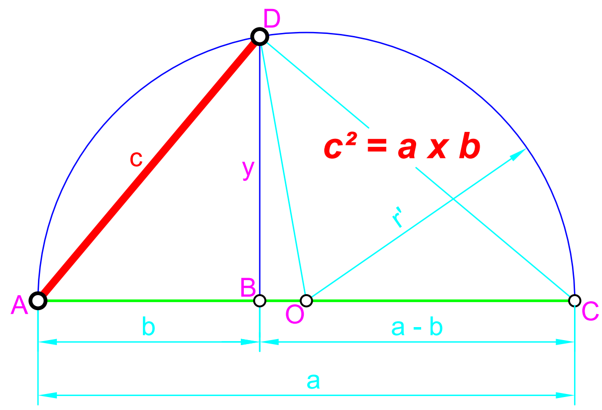
Demostración:
Aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos fijandonos en el triángulo rectángulo OBD, que:

$$r^2 = c^2 + x^2; \text{ despejando } c^2, \text{ se tiene } c^2 = r^2 - x^2 = (r + x)\bullet(r - x) = a\bullet b \text{ (c.s.q.d)}$$

El teorema del cateto: *todo cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección ortogonal sobre dicho cateto*.

La construcción grafica es:

1. Sobre una recta se llevan los dos segmentos dados, a = AC y b = AB, obteniendo el segmento AC, es decir restandose.
2. Se dibuja la semicircunferencia de diámetro AC.
3. Se dibuja la perpendicular al segmento AC por el punto B, que corta a la semicircunferencia en el punto D. El segmento media proporcional es él AD = c.



Demostración:
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ABD: $c^2 = y^2 + b^2$ (1)

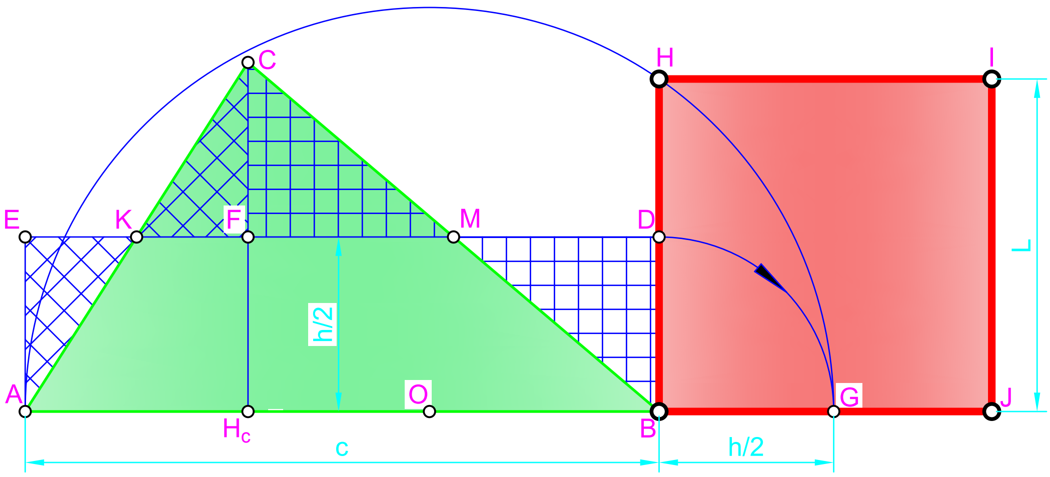
por la demostración del teorema de la altura, tenemos que: $y^2 = AB\bullet BC = b\bullet(a - b)$ (2)

Sustituyendo la expresión (2) en la (1) tenemos: $c^2 = b\bullet(a - b) + b^2 = a\bullet b - b^2 + b^2 = a\bullet b$ (c.s.q.d)

El procedimiento más utilizado en las cuadraturas es aplicando el teorema de la altura.

En todos los problemas de cuadraturas, lo que se persigue es dibujar el cuadrado equivalente a la figura de partida, ya sea ésta poligonal, curvilínea o mixta, por ello se busca que el área de la figura de partida, sea una expresión algebraica del producto de dos magnitudes, en nuestro caso segmentos, para obtener el lado del cuadrado, que está elevado al cuadrado, valga la redundancia. De todo lo dicho, es fundamental el conocimiento de las áreas de las principales figuras planas.

Vamos a comenzar nuestro trabajo con el estudio de las poligonales.



Cuadrado equivalente a un triángulo.

Sea el triángulo ABC.

1. Se determina la mitad de su altura, FHc = h/2.
2. A partir del vértice B, se lleva la mitad de la altura, obteniendo el segmento AG.
3. Se dibuja la semicircunferencia de diámetro AG.
4. Por el extremo B se dibuja una perpendicular al segmento AG, que corta a la semicircunferencia en el punto H. El segmento BH es el lado, L, del cuadrado equivalente al triángulo ABC.

Lo que se ha hecho es aplicar el teorema de la altura a los segmentos, c (base del triángulo) y BG = h/2 (mitad de la altura), pues el área del triángulo es (base x altura)/2 = (c x h)/2 = agrupando terminos = c x (h/2) = L² de donde, recordando la expresión dada de la media proporcional, a x b = c² y comparándola con la del área de nuestro triángulo, se tiene que:

base = $\boxed{\text{a = c}}$, altura del triángulo/2 = $\boxed{\text{b = h/2}}$ y $\boxed{\text{c (resultado) = L.}}$

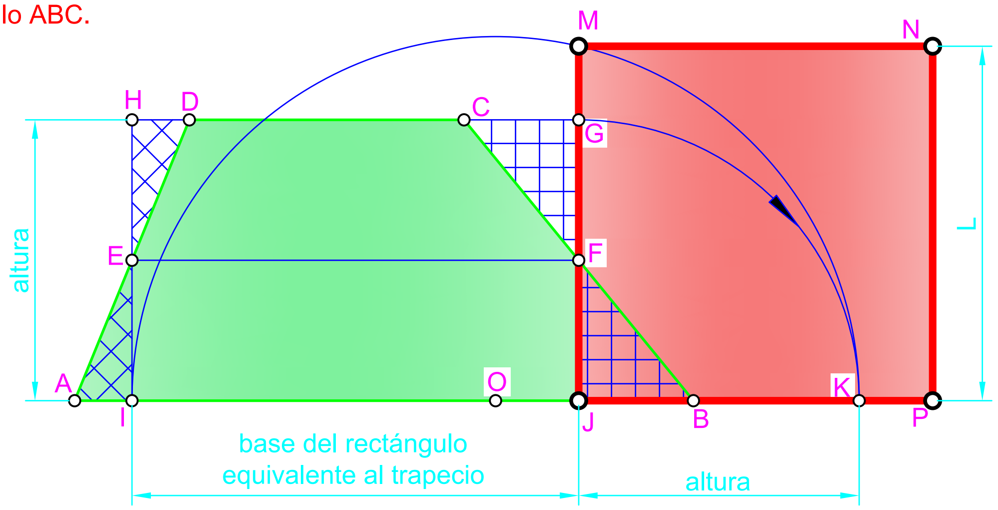
De esta construcción se puede también deducir, dibujando el rectángulo ABDE, de igual base que el triángulo y altura la mitad:

El rectángulo ABDE tiene la misma área que el triángulo, pues los triángulos AEK y KFC son iguales, pues el punto K es el medio del lado AC y además los catetos AE y FC son iguales a la mitad de la altura del triángulo. Lo mismo se puede deducir de los triángulos BDM y MFC. De todo esto se tiene también el procedimiento para cuadrar cualquier rectángulo e incluso cualquier rombo y romboide, pues sus áreas valen, **base x altura**, aplicandose la media proporcional, que en este caso resulta igual a la del triángulo ABC.

Cuadratura de un trapecio.

Sea el trapecio ABCD

En este caso, teniendo en cuenta lo visto con el triángulo anterior, se tiene que dibujando la paralela media EF, los triángulos AIE y FHD son iguales, por las mismas razones que las indicadas con el triángulo. Igual sucede con los triángulos BJF y FGC, que son iguales.



Todo esto indica que el trapecio ABCD tiene la misma área que el rectángulo IJGH, cuya cuadratura se realiza aplicando la media proporcional entre su base, IJ (la del rectángulo equivalente) y la altura, como se ha visto con el triángulo anterior. Así se ha obtenido el cuadrado equivalente JPNM.

NOTA 1: En la cuadratura del trapecio, también se puede utilizar la formula de sul área, pero desde el punto de vista gráfica, es más sencillo hacerlo así.

NOTA 2: el cuadrado y el trapecio tienen un triángulo común, el BJF. Al sombrear se ha preferido adoptar el color del cuadrado solución