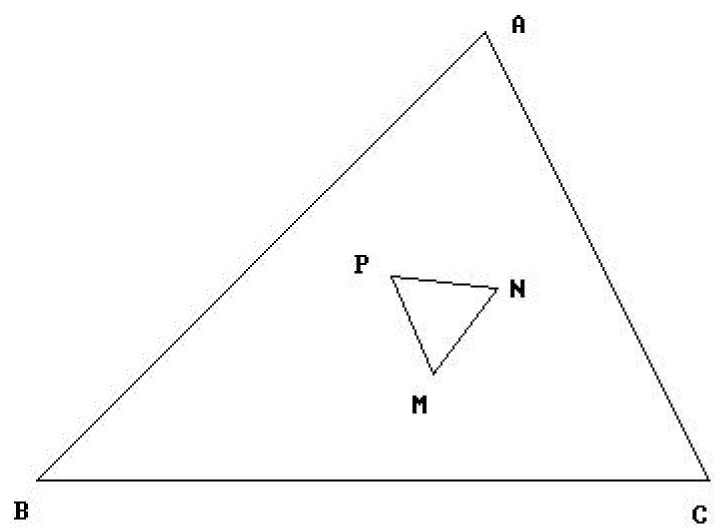
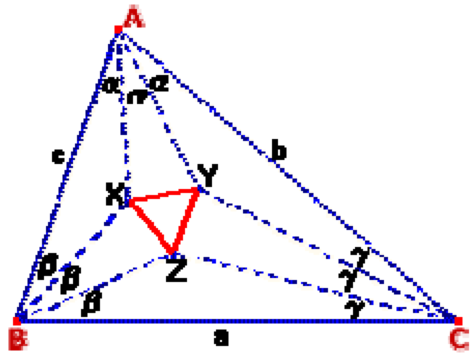
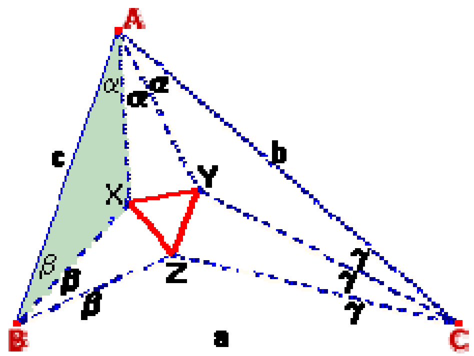


El teorema dice así: *Sea ABC un triángulo arbitrario. Trazamos las trisectrices de cada uno de los ángulos A, B, C. Las trisectrices de B y C próximas al lado a se cortan en un punto M y análogamente se determinan N y P Entonces el triángulo MNP es siempre equilátero.*

DEMOSTRACIÓN

<u>Teorema de Morley</u>





Aplicando el [terema del seno]() al triángulo BXA resulta

$$\frac{AX}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} \qquad (\#1)$$

Teniendo en cuenta la interpretación geométrica de dicho teorema en el triángulo BCA

$$\frac{c}{\operatorname{sen}(3\gamma)} = 2r$$

siendo r el radio de la cincunferencia ciscunscrita a dicho triángulo.

Como, además $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180º$ resulta

$$\alpha + \beta + \gamma = 60º$$

Despejando en (#1) y tendiendo lo anterior en cuenta

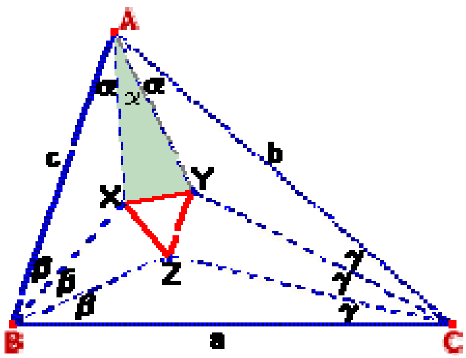
$$AX=\frac{2r\,\mathrm{sen}(3\gamma)\,\mathrm{sen}\beta}{\mathrm{sen}\,(60^\circ-\gamma)}=$$

$$=\frac{2r\,\mathrm{sen}\beta\left(3\mathrm{sen}\gamma-4\mathrm{sen}^3\gamma\right)}{\mathrm{sen}\,(60^\circ-\gamma)}=\frac{2r\,\mathrm{sen}\beta\,\mathrm{sen}\gamma\left(3-4\mathrm{sen}^2\gamma\right)}{\mathrm{sen}\,(60^\circ-\gamma)}=$$

$$=\frac{2r\,\mathrm{sen}\beta\,\mathrm{sen}\gamma\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{sen}\,\gamma\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{sen}\,\gamma\right)}{\frac{1}{4}\mathrm{sen}\,(60^\circ-\gamma)}=$$

$$=\frac{8r\,\mathrm{sen}\,\beta\,\mathrm{sen}\,\gamma(\mathrm{sen}\,60^\circ+\mathrm{sen}\,\gamma)(\mathrm{sen}\,60^\circ-\mathrm{sen}\,\gamma)}{\mathrm{sen}\,(60^\circ-\gamma)}=$$

$$=\frac{8r\,\mathrm{sen}\,\beta\,\mathrm{sen}\,\gamma\cdot 2\mathrm{sen}\left(30^\circ+\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)\cdot 2\mathrm{sen}\left(30^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(30^\circ+\frac{\gamma}{2}\right)}{2\mathrm{sen}\left(30^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)}$$



Es decir

$$AX = 8r\ \mathrm{sen}(\beta)\ \mathrm{sen}(\gamma)\ \mathrm{sen}\ (60^\circ + \gamma) \qquad (\#2)$$

Análogamente

$$AY = 8r\ \mathrm{sen}(\beta)\ \mathrm{sen}(\gamma)\ \mathrm{sen}\ (60^\circ + \beta) \qquad (\#3)$$

Por otro lado, aplicando el teorema del coseno al triángulo XYA

$$XY^2 = AX^2 + AY^2 - 2\ AX\ AY\ \cos(\alpha)$$

y sustituyendo (#2) y (#3) tendremos

$$XY^2=64r^2\mathrm{sen}^2\beta\,\mathrm{sen}^2\gamma\,\mathrm{sen}^2(60^\circ+\gamma)+64r^2\mathrm{sen}^2\beta\,\mathrm{sen}^2\gamma\,\mathrm{sen}^2(60^\circ+\beta)-$$
$$-128r^2\mathrm{sen}^2\beta\,\mathrm{sen}^2\gamma\,\mathrm{sen}(60^\circ+\gamma)\,\mathrm{sen}(60^\circ+\beta)\cos\alpha=$$
$$=64r^2\mathrm{sen}^2\beta\,\mathrm{sen}^2\gamma\,[\ \mathrm{sen}^2(60^\circ+\gamma)+\mathrm{sen}^2(60^\circ+\beta)-$$
$$-2\mathrm{sen}(60^\circ+\gamma)\mathrm{sen}(60^\circ+\beta)\cos\alpha\ ]=$$
$$=64r^2\mathrm{sen}^2\alpha\,\mathrm{sen}^2\beta\,\mathrm{sen}^2\gamma$$

por tanto

$$XY = 8r\ \mathrm{sen}(A)\ \mathrm{sen}(B)\ \mathrm{sen}\ (\gamma\ )$$

y por simetría

$$XY = YZ = XZ \quad \text{c.q.d.}$$

Puede calcularse el corchete de la última expresión mediante el siguiente cambio de variable

$$60^\circ + \beta = x;\ 60^\circ + \gamma = y;\ \alpha = z$$

Como $\alpha + \beta + \gamma = 60º$ resulta $x + y + z = 180º$ de donde $z = 180º - (x + y)$ y

$$\cos(\alpha) = \cos(z) = \cos[180º - (x + y)] = \cos(x + y)$$

Entonces, el contenido del corchete es igual a

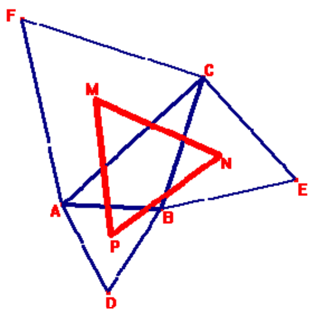
$$\begin{gathered}\text{sen}^2(x) + \text{sen}^2(y) + 2\,\text{sen}(x)\,\text{sen}(y)\cos(x + y) = \\ = \text{sen}^2(x) + \text{sen}^2(y) + 2\,\text{sen}(x)\,\text{sen}(y)\,(\cos(x)\cos(y) - \text{sen}(x)\,\text{sen}(y) = \\ = \text{sen}^2(x)\,(1 - \text{sen}^2(y)) + \text{sen}^2 y\,(1 - \text{sen}^2(x)) + 2\,\text{sen}(x)\,\text{sen}(y)\cos(x)\cos(y) = \\ = (\text{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\,\text{sen}(y))^2 = \text{sen}^2(x + y) = \text{sen}^2 z = \text{sen}^2(\alpha)\end{gathered}$$

Teorema de Napoleón ***(1.769-1.821)***

Napoleón Bonaparte, además de ser uno de los militares más famosos de la historia, fue muy aficionado a las matemáticas, especialmente a la geometría. Se cuenta que se enzarzó en una discusión sobre matemáticas nada menos que con Lagrange y Laplace, dos de los mejores matemáticos de todos los tiempos y que éste último le dijo: "Lo último que esperamos de usted, General, es una lección de geometría"

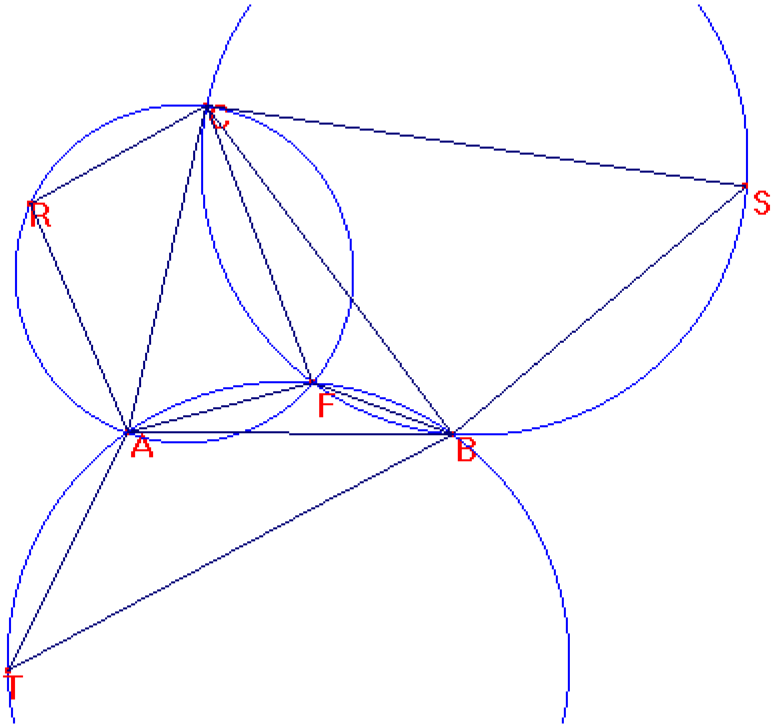
El teoerma que lleva su nombre aunque se le atribuye a Napoleón, parece dudoso que lo enunciara y demostrara por su cuenta. Dice así:

Sobre los lados de un triángulo cualquiera construimos tres triángulos equiláteros exteriores de forma que uno de los lados de cada triángulo exterior coincide con el correspondiente lado del triángulo dado. Pues bien los centros de tales tres triángulos forman un ***triángulo equilátero MNP.***



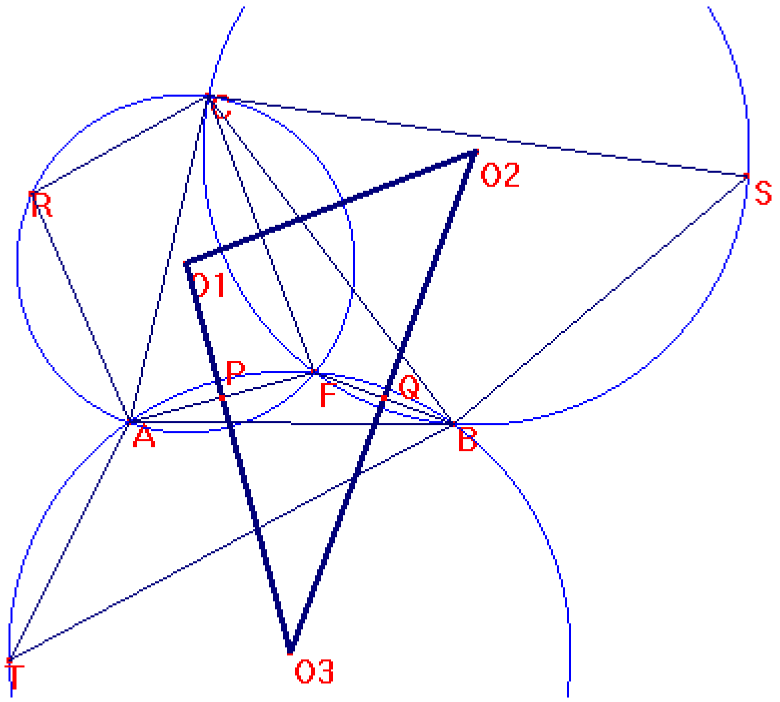
DEMOSTRACIÓN:

1. Se considera un triángulo ABC, sobre cuyos lados se han construido tres triángulos ABT, BCS y CAR de forma que los ángulos R, T y S sumen 180º. Entonces las tres circunferencias circunscritas a los tres triángulos (ABT, BCS y CAR) se cortan en un punto (F).



Si consideramos las circunferencias circunscritas a los triángulos ABT y BCS observamos que se cortan en B y en otro punto F. (Si sólo se cortaran en B, resultaría que A, B y C estarían alineados). Se cumple (por ser ABFT un cuadrilátero inscrito en una circunferencia) <ABF=180º - <T. Por idéntico motivo: <BFC= 180º - <S. Resulta así:
<AFC = 360º - (<ABF +< BFC) = 360º - (180º - <T + 180º - <S) = <T + <S = 180º - <R. Por tanto A, F, C y R están sobre una misma circunferencia y F es el punto de intersección de las tres circunferencias circunscritas.

2. Se considera un triángulo ABC, sobre cuyos lados se han construido tres triángulos ABT, BCS y CAR de forma que los ángulos R, T y S sumen 180º. Entonces el triángulo ($O_1O_2O_3$) formado por los circuncentros de los tres triángulos cumple: <O_1=<R, <O_2=<S y <O_3=<T.

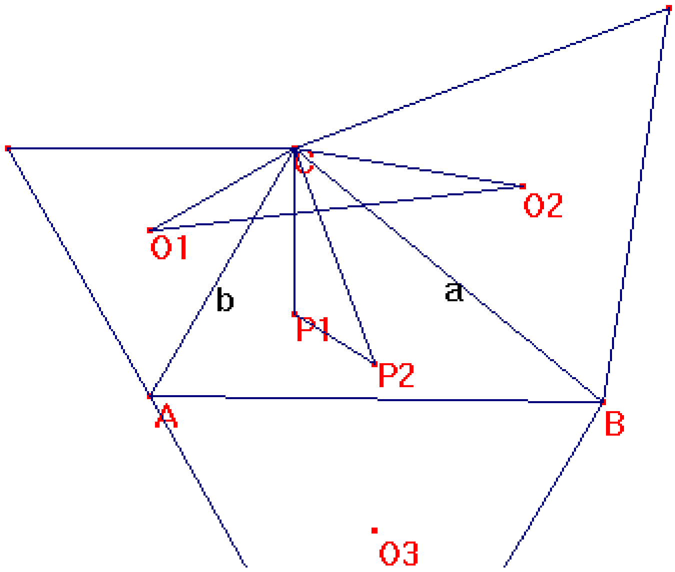


O_3O_2 y O_3O_1 son perpendiculares a los ejes radicales FB y AF . Por ello el cuadrilátero $PFQO_3$ es inscriptible en una circunferencia (los ángulos en P y en Q suman 180º) y deducimos que O_3= 180º - <AFB. Por otra parte (fijarse en el cuadrilátero TAFB inscrito en una circunferencia) sabemos que <T = 180º - <AFB. Comparando las dos últimas igualdades queda claro que $<O_3$ = <T.

3. Si sobre los lados de un triángulo construimos triángulos equiláteros exteriores, resulta que el triángulo formado por sus centros también es equilátero (triángulo de Napoleón exterior).
Es consecuencia del apartado anterior (**2.**)

4. Si sobre los lados de un triángulo construimos triángulos equiláteros interiores, resulta que el triángulo formado por sus centros también es equilátero (triángulo de Napoleón interior).
Ver conclusiónes del apartado siguiente **(5.)**

5. El área de un triángulo es igual a la diferencia de las áreas de sus triángulos de Napoleón.



Consideremos el triángulo O_1CO_2. Los lados $=O_1C$ y O_2C miden, respectivamente, $b/\sqrt{3}$ y $a/\sqrt{3}$ (son los radios de las circunferencias circunscritas a triángulos equiláteros de radios b y c, respectivamente). El ángulo $<O_1CO_2$ mide: 30º+<C+30º, es decir <C+60º. Aplicando el teorema del coseno tenemos: $(O_1O_2)^2 = (a^2+b^2)/3 - 2/3ab\cdot\cos(C+60º)$.
Concentrémonos ahora en el triángulo P_1CP_2, donde P_1 y P_2 son centros de dos de los triángulos de Napoleón internos y no olvidemos que dichos puntos se pueden obtener a partir de O_1 y O_2 aplicando una simetría axial respecto a los lados CA yCB, respectivamente. Por ello $CP_1= CO_1 = b/\sqrt{3}$ y $CP_2 = CO_2 = a/\sqrt{3}$. El ángulo P_1CP_2 mide C-60º. Aplicando el teorema del coseno tenemos: $(P_1P_2)^2 = (a^2+b^2)/3 - 2/3ab\cdot\cos(C-60º)$.
Restando las dos igualdades:
$(O_1O_2)^2 - (P_1P_2)^2=2/3ab[\cos(C-60º) - \cos(C+60º)] =$
$4/3ab[\text{sen}(C)\text{sen}(60º)]=$
$2\sqrt{3}/3ab\cdot\text{sen}(C)=2/\sqrt{3}\,ab\cdot\text{sen}(C) = 4/\sqrt{3}\,$área(ABC).

Del resultado anterior se deduce inmediatamente que **el triángulo interior de Napoleón también es equilátero** (el área(ABC) es constante y los lados O_iO_j son iguales).

Además: $\sqrt{3}/4(O_1O_2)^2 - \sqrt{3}/4(P_1P_2)^2 =$ área (ABC) es precisamente:
área($O_1O_2O_3$) - área($P_1P_2P_3$) = área(ABC).