Las Lúnulas son formas geométricas cóncavas, limitadas por dos arcos de circunferencia. Reciben su nombre por parecerse a la Luna en cuarto creciente. A diferencia de la circunferencia, algunas son cuadrables, en esta lámina os proponemos dos casos.

Demostrar gráficamente que la suma de las áreas de las Lúnulas $L_1$ y $L_2$ es igual al área del triángulo ABC.

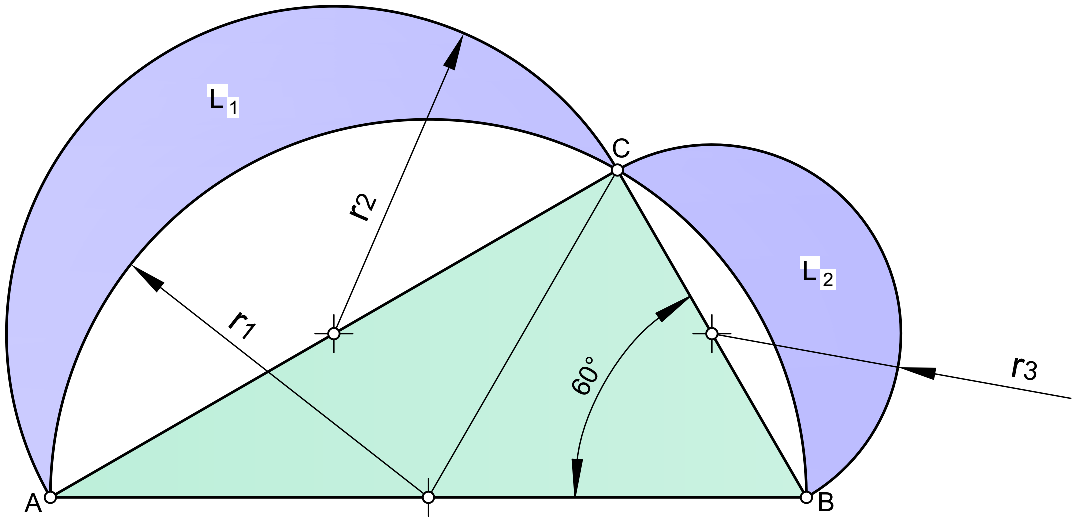



figura 1

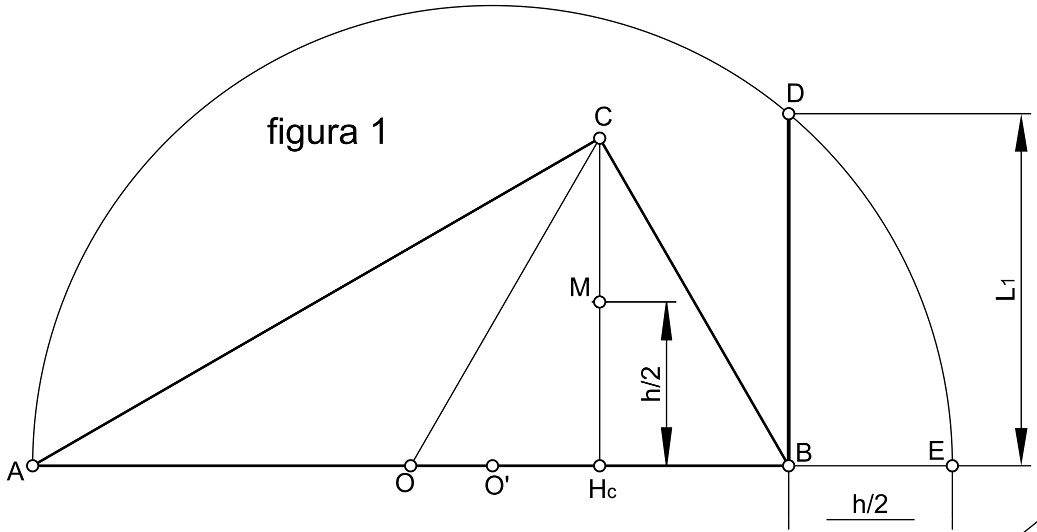



figura 3

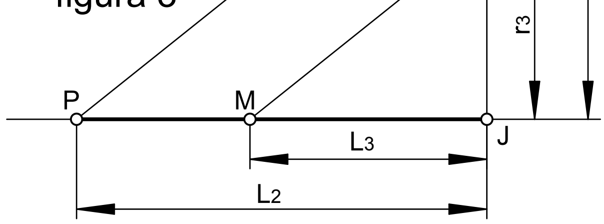
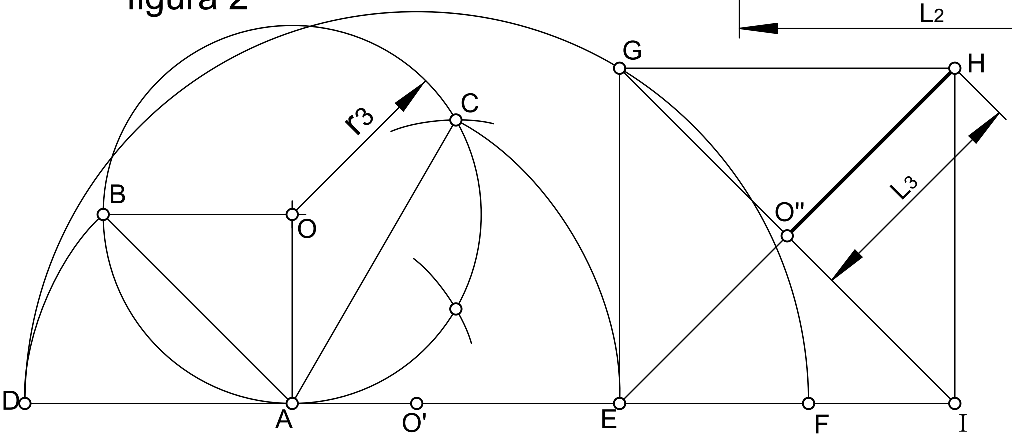


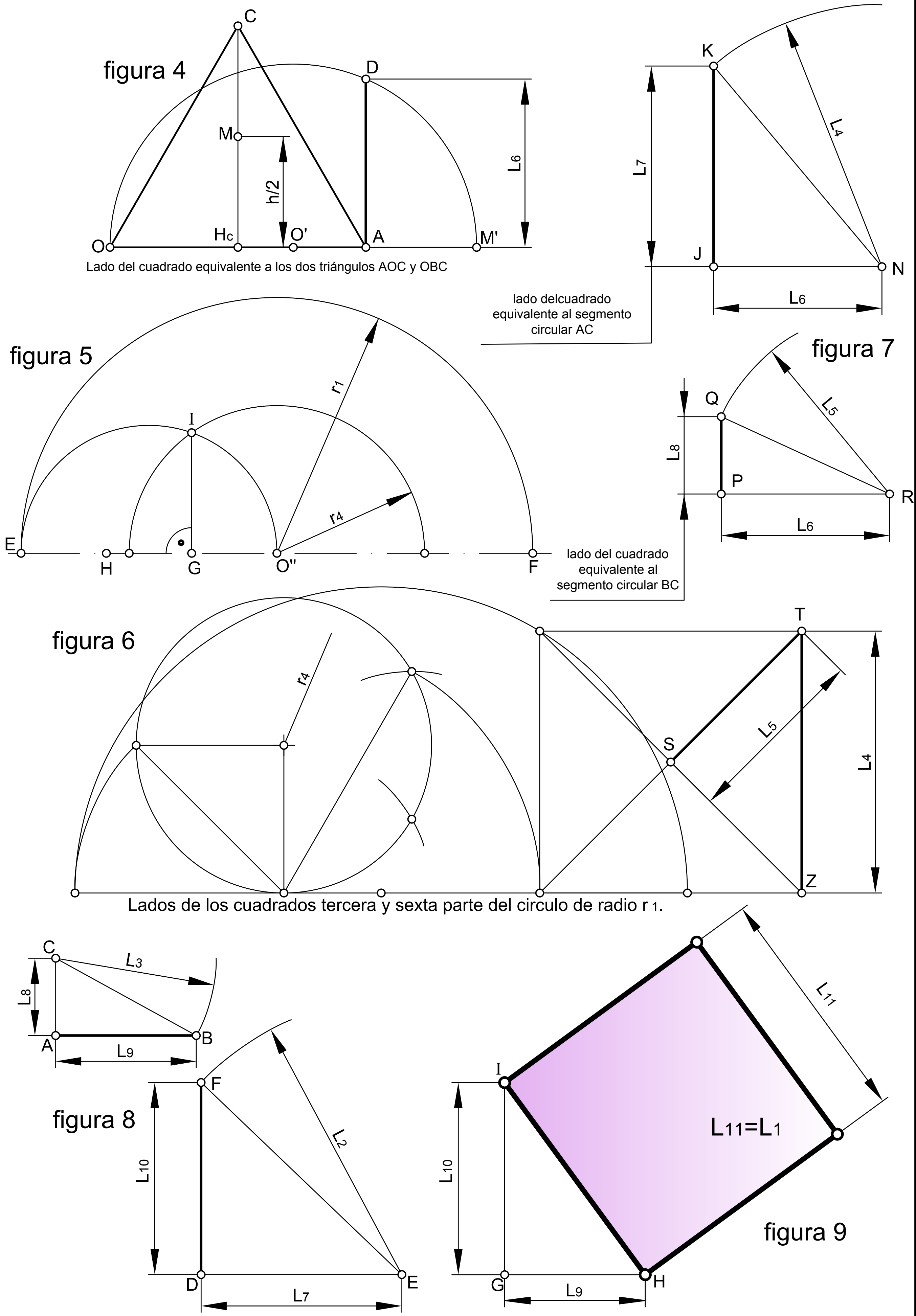

figura 2




# Lunulas. 2008-2009

Hoja 1/3

Demostrar gráficamente que la suma de las áreas de las Lúnulas $L_1$ y $L_2$ es igual al área del triángulo ABC.




# Lunulas. 2008-2009

Hoja 2/3

Demostrar gráficamente que la suma de las áreas de las Lúnulas $L_1$ y $L_2$ es igual al área del triángulo ABC.

Este ejercicio se reduce a determinar los cuadrados de varias formas geométricas y restarlos y sumarlos, hasta demostrar la igualdad entre las áreas. El proceso es como sigue:

1 - Determinación del lado $L_1$ del cuadrado equivalente al triángulo ABC.
Aplicando la media proporcional entre la base AB del triángulo y la mitad de su altura, h/2, se tiene la construcción mostrada en la figura 1. Donde el lado es $L_1$.

2 - Determinación del lado equivalente a las dos semicircunferencias BC y CA.
Se realiza (figura 2) la cuadratura del círculo de radio $r_3$, aplicando la media proporcional entre $\pi r_3$ y $r_3$, obteniendo el cuadrado EIHG.

- Como lo que se quiere es el lado del cuadrado equivalente al semicírculo, resulta que la semidiagonal del cuadrado EIHG es el lado buscado $L_3$.
- Aplicando proporcionalidad gráfica entre $L_3$ su radio correspondiente $r_3$ y $r_2$, utilizando un triángulo rectángulo (figura 3), tenemos el lado $L_2$ del semicírculo CA.

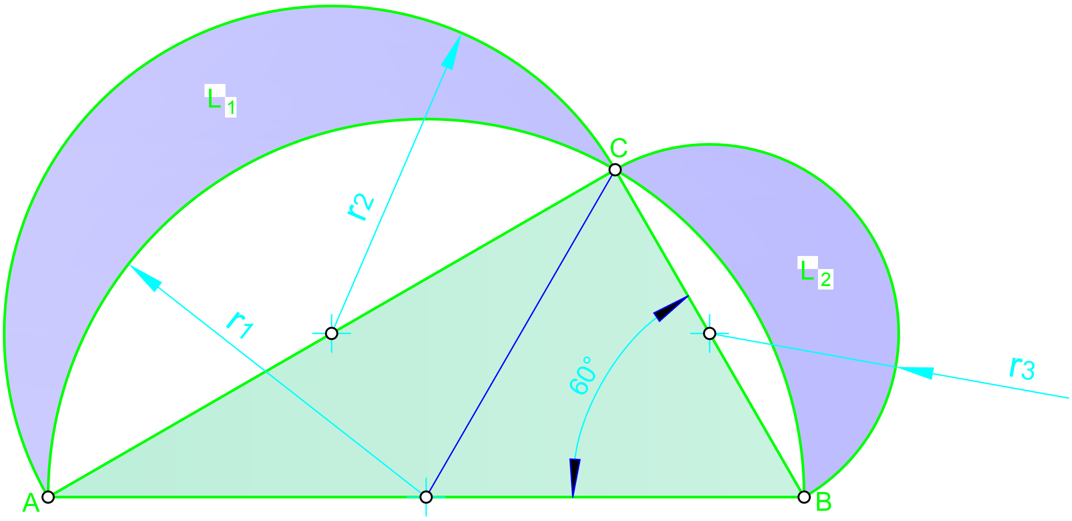
3 - Como a estos semicírculos hay que restarles los segmentos circulares abarcados por las cuerdas y arcos BC y CA; vamos a determinar sus áreas.

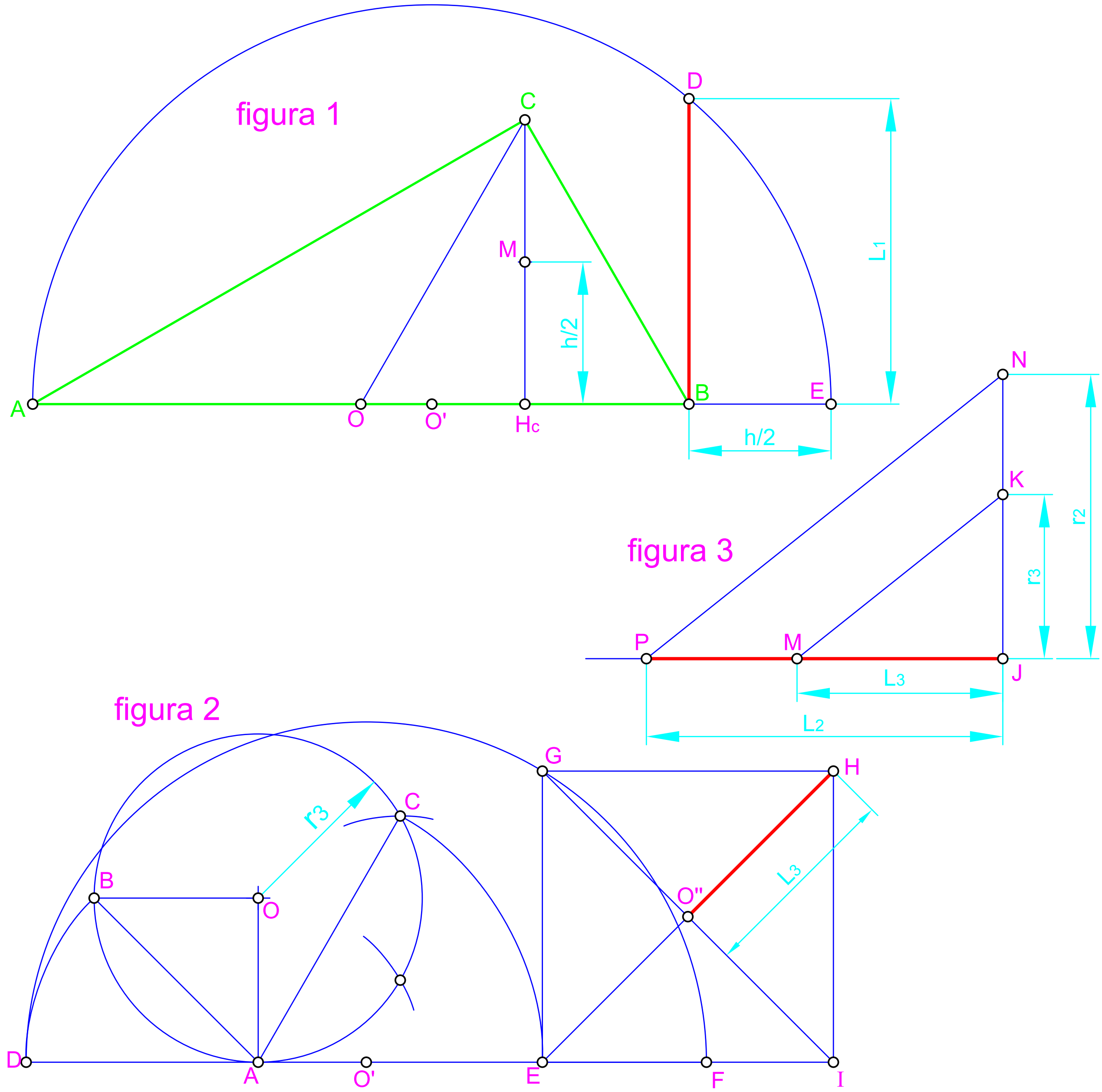
El segmento circular, por ejemplo, CA, se obtiene de restar el triángulo AOC (figura del enunciado) al sector circular de los mismos vértices, por lo tanto tenemos que cuadrar estas dos figuras, siendo el proceso ...

- El área del triángulo AOC es igual a la del triángulo OBC, pues tienen la misma altura, h, e igual base el radio $r_1$. Para realizar su cuadratura (se ha hecho la del triángulo OBC figura 4), el proceso es similar al realizado con el triángulo ABC; de esta manera se obtiene el lado L6.
- Para cuadrar el sector circular AOC, hay que tener en cuenta, que como el ángulo AOC = 120º, su área es la tercera parte del circulo completo.
- Numéricamente el cálculo es sencillo, pero gráficamente el procedimiento no es tan inmediato, teniendo que hacer, hay otros caminos, la división del círculo en tres áreas iguales, mediante circunferencias concéntricas, siendo el proceso (figura 5) …
    1. Se toma la circunferencia de radio $r_1$ (por razones de espacio, se ha dibujado solo la semicircunferencia).
    2. Se divide uno de sus radios en tres partes iguales, obteniendo los puntos H y G.
    3. Se dibuja la semicircunferencia de diámetro el radio EO''.
    4. Por el punto G se dibuja una línea perpendicular al radio, que corta a la semicircunferencia en el punto I. La circunferencia de radio O''I tiene por área la tercera parte de la de radio $r_1$.
    5. Se cuadra de manera similar a la cuadratura del circulo de radio $r_3$, obteniendo el lado del cuadrado ZT = $L_4$.
    6. Como también queremos el área del sector circular OBC, que es la sexta parte del circulo total, o lo que es lo mismo la mitad del determinado ahora; se tiene, que el lado del cuadrado,sexta parte, vale la semidiagonal, es decir, el segmento ST = $L_5$.
- Obtenidos estos cuadrados, y aplicando el Teorema de Pitágoras, tomando como cateto el lado L6 y como hipotenusas $L_4$ y $L_5$, se obtienen los lados $L_7$ y $L_8$ de los cuadrados de igual área que los segmentos circulares AC y BC respectivamente. Ya queda menos.
- Ahora solo queda restar estos dos cuadrados, mediante sus lados $L_7$ y $L_8$, a los de los cuadrados de los semicírculos $L_2$ y $L_3$ respectivamente, volviendo a aplicar el Teorema de Pitágoras a los triángulos (figura 8):
- - DEF de cateto $L_7$ (lado del cuadrado equivalente al segmento circular AC) e hipotenusa $L_2$ (lado del cuadrado equivalente al semicírculo de diámetro AC), obteniendo el lado $L_{10}$.
- - ABC de cateto $L_8$ (lado del cuadrado equivalente al segmento circular BC) e hipotenusa $L_3$ (lado del cuadrado equivalente al semicírculo de diámetro BC), obteniendo el lado $L_9$.
- Y por fin, sumar estos dos cuadrados (figura 9), tomando los lados obtenidos como catetos, teniendo el lado $L_{11}$, que coincide con el $L_1$, que es lo que se trataba de demostrar.

Las Lúnulas son formas geométricas cóncavas, limitadas por dos arcos de circunferencia. Reciben su nombre por parecerse a la Luna en cuarto creciente. A diferencia de la circunferencia, algunas son cuadrables, en esta lámina os proponemos dos casos.

Demostrar gráficamente que la suma de las áreas de las Lúnulas $L_1$ y $L_2$ es igual al área del triángulo ABC.

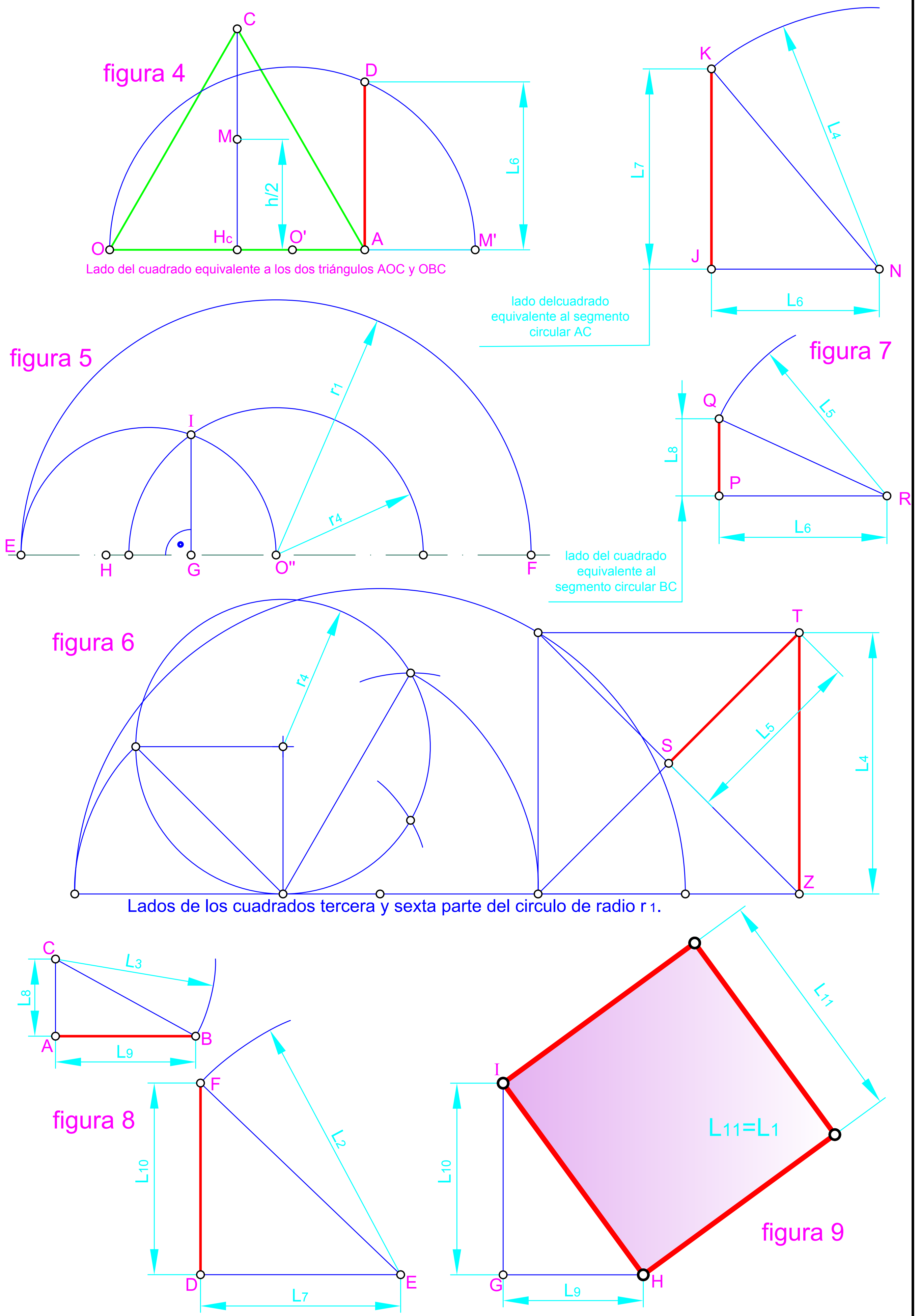



# Lunulas. 2008-2009

Hoja 1/3

Demostrar gráficamente que la suma de las áreas de las Lúnulas $L_1$ y $L_2$ es igual al área del triángulo ABC.




Lunulas. 2008-2009

Hoja 2/3

Demostrar gráficamente que la suma de las áreas de las Lúnulas $L_1$ y $L_2$ es igual al área del triángulo ABC.

Este ejercicio se reduce a determinar los cuadrados de varias formas geométricas y restarlos y sumarlos, hasta demostrar la igualdad entre las áreas. El proceso es como sigue:

1 - Determinación del lado $L_1$ del cuadrado equivalente al triángulo ABC.

Aplicando la media proporcional entre la base AB del triángulo y la mitad de su altura, h/2, se tiene la construcción mostrada en la figura 1. Donde el lado es $L_1$.

2 - Determinación del lado equivalente a las dos semicircunferencias BC y CA.

Se realiza (figura 2) la cuadratura del círculo de radio $r_3$, aplicando la media proporcional entre $\pi r_3$ y $r_3$, obteniendo el cuadrado EIHG.

- Como lo que se quiere es el lado del cuadrado equivalente al semicírculo, resulta que la semidiagonal del cuadrado EIHG es el lado buscado $L_3$.
- Aplicando proporcionalidad gráfica entre $L_3$ su radio correspondiente $r_3$ y $r_2$, utilizando un triángulo rectángulo (figura 3), tenemos el lado $L_2$ del semicírculo CA.

3 - Como a estos semicírculos hay que restarles los segmentos circulares abarcados por las cuerdas y arcos BC y CA; vamos a determinar sus áreas.

El segmento circular, por ejemplo, CA, se obtiene de restar el triángulo AOC (figura del enunciado) al sector circular de los mismos vértices, por lo tanto tenemos que cuadrar estas dos figuras, siendo el proceso ...

- El área del triángulo AOC es igual a la del triángulo OBC, pues tienen la misma altura, h, e igual base el radio $r_1$. Para realizar su cuadratura (se ha hecho la del triángulo OBC figura 4), el proceso es similar al realizado con el triángulo ABC; de esta manera se obtiene el lado L6.
- Para cuadrar el sector circular AOC, hay que tener en cuenta, que como el ángulo AOC = 120º, su área es la tercera parte del circulo completo.
- Numéricamente el cálculo es sencillo, pero gráficamente el procedimiento no es tan inmediato, teniendo que hacer, hay otros caminos, la división del círculo en tres áreas iguales, mediante circunferencias concéntricas, siendo el proceso (figura 5) …
    1. Se toma la circunferencia de radio $r_1$ (por razones de espacio, se ha dibujado solo la semicircunferencia).
    2. Se divide uno de sus radios en tres partes iguales, obteniendo los puntos H y G.
    3. Se dibuja la semicircunferencia de diámetro el radio EO".
    4. Por el punto G se dibuja una línea perpendicular al radio, que corta a la semicircunferencia en el punto I. La circunferencia de radio O"I tiene por área la tercera parte de la de radio $r_1$.
    5. Se cuadra de manera similar a la cuadratura del circulo de radio $r_3$, obteniendo el lado del cuadrado ZT = $L_4$.
    6. Como también queremos el área del sector circular OBC, que es la sexta parte del circulo total, o lo que es lo mismo la mitad del determinado ahora; se tiene, que el lado del cuadrado,sexta parte, vale la semidiagonal, es decir, el segmento ST = $L_5$.
- Obtenidos estos cuadrados, y aplicando el Teorema de Pitágoras, tomando como cateto el lado L6 y como hipotenusas $L_4$ y $L_5$, se obtienen los lados $L_7$ y $L_8$ de los cuadrados de igual área que los segmentos circulares AC y BC respectivamente. Ya queda menos.
- Ahora solo queda restar estos dos cuadrados, mediante sus lados $L_7$ y $L_8$, a los de los cuadrados de los semicírculos $L_2$ y $L_3$ respectivamente, volviendo a aplicar el Teorema de Pitágoras a los triángulos (figura 8):
- - DEF de cateto $L_7$ (lado del cuadrado equivalente al segmento circular AC) e hipotenusa $L_2$ (lado del cuadrado equivalente al semicírculo de diámetro AC), obteniendo el lado $L_{10}$.
- - ABC de cateto $L_8$ (lado del cuadrado equivalente al segmento circular BC) e hipotenusa $L_3$ (lado del cuadrado equivalente al semicírculo de diámetro BC), obteniendo el lado $L_9$.
- Y por fin, sumar estos dos cuadrados (figura 9), tomando los lados obtenidos como catetos, teniendo el lado $L_{11}$, que coincide con el $L_1$, que es lo que se trataba de demostrar.