Esta es una adaptación para la Web del taller para profesores, presentado en Bridges 2004
Aparece en: *Bridges for Teachers, Teachers for Bridges, 2004 Workshop Book,* Mara Alagic and Reza Sarhangi eds., pp. 31-42. [1]

Construcciones geométricas con deslizadores [2] de papel

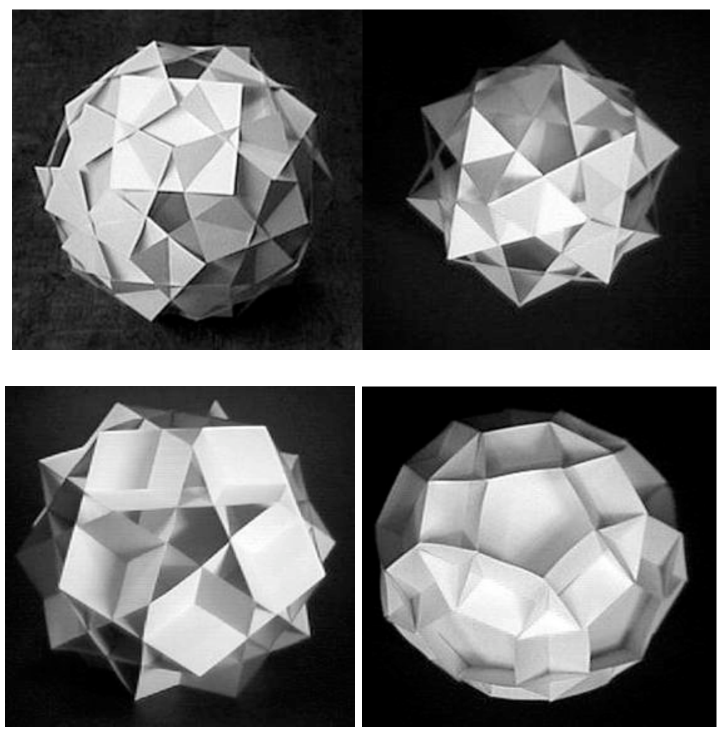
George W. Hart [3]

Computer Science Dept.
Stony Brook University

george@georgehart.com
http://www.georgehart.com

Resumen

Siete proyectos de construcciones con papel, para proveer a los estudiantes de experiencias de exploración y relación entre objetos bi-dimensionales y tri-dimensionales.



"Deslizadores" basados en cuadrados, triángulos, pentágonos y decágonos.

---

[1] Esta es una traducción de "Slide-Together Geometric Paper Constructions" de George W. Heart, consultado en la siguiente dirección (31-07-09): http://www.georgehart.com/slide-togethers/slide-togethers.html

[2] El término exacto que Hart ha utiliza *es "slide - together"*, que podría traducirse como "*piezas que encajan unas con otras"*, pero por simplificar el lenguaje he optado por traducir simplemente como *deslizadores*.

[3] Traducción al español de Rafael Miranda Molina para GeometriaDinamica.cl

Introducción

Esta actividad consiste en siete atractivas construcciones, que son entretenidas y relativamente simples de realizar, dado que simplemente se cortan piezas de papel y se encajan entre sí. Una serie de habilidades matemáticas se desarrollan, relativas a la estructura geométrica, coloreado de patrones, y visualización, tanto concreta como mental. He encontrado que estas son buenas actividades para el aula para alumnos del segundo ciclo básico, secundaria y nivel superior. Más aun, como proyectos de construcción en equipo, ellos funcionan bien en grupos de dos o tres estudiantes. Tal estrategia fomenta la colaboración y la comunicación matemática.

Cada “deslizador” está hecho de copias idénticas de un mismo polígono regular (Ej. solamente cuadrados o triángulos), con ranuras cortadas en posiciones apropiadas. Las suelo hacer de cartulina, simplemente fotocopiando las plantillas. En la mayoría de los casos, uso pegamento o cinta adhesiva no es necesaria, pero podría utilizar una pequeña gota de pegamento en las esquinas o un poco de cinta adhesiva al interior para unir los componentes. El unir las esquinas con precisión es la clave para producir una impresión geométrica prolija.

Deslizadores basados en hexágonos, decagramas y pentagramas

Diferenciando las instrucciones: Los siete modelos se han ilustrado aproximadamente en orden de dificultad de construcción. Le sugiero empezar con los cuadrados. Las instrucciones para ello están detalladas más abajo, y las de los otros son análogas. Una estrategia es que todos en la clase construyan el modelo de los cuadrados y luego asignar un modelo diferente de los restantes a cada equipo. Asigne los más difíciles a los equipos que esperan un mayor desafío. La combinación de los resultados puede constituir una atractiva muestra. Un móvil que construí con los siete modelos, fue exhibido en la conferencia de 1997 matemática y arte de Suny (Albany, NY)[4], y ha estado en exhibición desde entonces en el museo Goudreau de matemática, en New Hyde Park, New York.

[4] Textual: *“1997 Math and Art conference at SUNY Albany, NY”*

Construyendo el deslizador de los 30 cuadrados

Copia y corte. Para un modelo, use cinco hojas de cartulina de cinco colores distintos. (El papel común es demasiado delgado. La cartulina es papel de mayor gramaje, más rígido que el papel común, pero suficientemente delgada para introducir en una fotocopiadora o impresora láser [5]). Copie la plantilla de los cuadrados, ubicada más abajo, en las cinco cartulinas. Si lo desea, puede ampliarla un poco para construir seis cuadrados de 3.5 pulgadas dentro de una hoja tamaño carta; lo único esencial es que los treinta cuadrados sean exactamente del mismo tamaño. Si se utiliza sólo un color, la construcción funciona geométricamente, pero gran parte de la belleza se pierde.

Usando tijeras, corte las líneas para obtener treinta cuadrados. Individualmente corte las cuatro rendijas en cada uno, es decir, nos los apile para hacer varias rendijas con un corte, dado que esto será demasiado impreciso. La prolijidad cuenta!. Usted no necesita cortar todas las piezas antes de empezar a unir. Puede empezar la construcción una vez que haya cortado al menos un cuadrado de cada color.

En lo que sigue, tenga en mente lo siguiente:

- Los cuadrados son planos, usted los doblará temporalmente durante el ensamble, pero ellos debieran terminar siendo planos;
- Cuando dos cuadrados se han encajado completamente entre sí, dos bordes de un cuadrado intersectan dos bordes del otro (un cruce ocurre al final de cada rendija)
- Cada cuadrado se unirá con cuatro cuadrados de los otros cuatro colores, por ejemplo, el azul nunca toca otro azul.

Ciclo de cinco. Note que hay dos rendijas largas y dos cortas en cada cuadrado. Usted siempre encajará una larga con una corta. Empiece uniendo dos cuadrados de distintos colores. Entonces, observe en la imagen, ubicada más arriba, que el grupo quíntuple central está rodeado por cinco cuadrados, y vea cómo dos de esos cinco están organizados como dos de los que acaba de unir. Continúe el patrón y añada un quinto cuadrado, un cuarto y un quinto. Una el quinto con el primer ciclo completo, alrededor de una apertura de un ciclo de cinco. Asegúrese siempre de mantener las esquinas de los cuadrados todas en el exterior de la construcción. Un problema común es el no encajar completamente las piezas entre sí; usted puede detectar esto al notar que los bordes no se intersectan.

Esquinas o uniones triples. En esta etapa, las uniones están libres para rotarlas, de manera que el ensamble será bastante flexible y algunas uniones podrían desensamblarse espontáneamente. Si esto sucede, sólo repare las uniones para mantener la apertura pentagonal. Lo que fija las partes son las esquinas triples, que serán agregadas a continuación. Para visualizar dónde van, tenga en mente que de los cuatro bordes de cada cuadrado, dos bordes (opuestos) tocarán aperturas pentagonales y los otros dos bordes (opuestos) tocarán esquinas triples. Observe esto en la imagen más arriba.

---

[5] Omitido un párrafo relativo a dónde comprar tal material: "*Most copy shops have a selection of colors on hand that they can copy on to for you, or you can buy it by the ream to put in your own copier.*"

Para hacer una esquina triple entre los cuadrados A y B, elija un nuevo cuadrado C y únalo con A y N. El primer problema es determinar de qué color debe ser C. El truco es mirar directamente a través del pentágono donde A y B se tocan, y ver de qué color es el cuadrado que se ve; elija el cuadrado C del mismo color. El segundo problema es hacer la unión triple simétrica con un pequeño triángulo bien formado al centro. El truco está en unir primero C con A y B rotándolo un poco C, y entonces temporalmente doblar y estirar los pequeños puntos de A, B y C según sea necesario, para rodear al otro y hacer una especia de espiral. Es más simple hacerlo que explicarlo, y típicamente algunos estudiantes descubren esto y son capaces de demostrárselo a sus compañeros.

Completando la estructura. Una vez que se domina este truco es natural el crear otra esquina triple, y otra y otra, etc., de manera que las cinco uniones iniciales quedan fijas. En cada caso, el color del nuevo cuadrado a añadir se determina mirando a través de la apertura pentagonal, para coincidir en el color del cuadrado opuesto. Cuando las cinco uniones originales están fijas de esta manera, habrá utilizado un total de diez cuadrados, de manera que ha hecho un tercio del trabajo. Complementar la estructura es sólo cuestión de notar que hay varias aperturas pentagonales incompletas, eligiendo cualquiera para unir, y fijando sus uniones, etc., hasta que los treinta cuadrados se hayan usado. Verifique a mediad que avanza que cada apertura está rodeada de cinco colores diferentes y cada unión con otros cuatros cuadrados de los otro cuatro colores. Si se ha hecho apropiadamente, los seis cuadrados de cuadrados de cualquier color estarán organizados como un cubo abierto.

Construyendo las otras seis estructuras

Técnicas similares se usan para ensamblar las otras seis estructuras. Cada una se puede visualizar como un grupo de polígonos intersectados, y las ranuras permiten que los planos de papel se atraviesen mutuamente. Un problema difícil es la elección de colores de cada parte, de manera que el arreglo completo sea simétrico. Un segundo problema es la técnica para realizar esquinas triples más completas con partes más grandes que deben doblarse y estirarse alrededor de cada una. Las ilustraciones ubicadas más arriba deberían ser guías útiles. En cada caso, se forman patrones de bordes interesante, regularmente estrellas de cinco puntas.

El modelo formado por triángulos y el formado por hexágonos tienen veinte componentes (cuatro partes en cinco colores cada una). Estos no tienen esquinas triples, de manera que son más simples en ese aspecto, pero más propensas a desarmarse solas. Sugiero usar un poco de cinta adhesiva para fijar las uniones. Alternativamente, unas pizcas de pegamento pueden mantener las esquinas unidas mutuamente. Si se ensamblan apropiadamente, las cuatro partes de cada color quedan en los planos de un tetraedro regular. La estructura formada por triángulos es especialmente interesante, dado que entre sus bordes se encuentran los bordes de cinco cubos; si al principio no los ve, ellos podrían aparecer a medida que lentamente se rota el modelo.

Los cuatro modelos restantes tienen doce componentes cada uno. Por cada cual, construya dos partes de seis colores distintos, y ensámblelos de manera que los pares de partes opuestas sean siempre del mismo color. Cada parte tocará otras cinco de los cinco colores restantes. Las uniones triples pueden ser difíciles al principio. La más difícil, es la construcción con doce pentagramas, dado que los segmentos donde dos estrellas se atraviesan deben unirse en dos pares de ranuras en vez de sólo uno.

Ideas de clase desde niveles medios hasta diseño arquitectural

En el aula, los modelos completos pueden relacionarse con los poliedros regulares y usarse para explorar ideas de conteo o simetría. Por ejemplo, con la construcción de los 30 cuadrados, usted puede preguntar:

- **¿Cuántas esquinas triples hay?**
  Respuesta: 20, corresponden a las 20 caras del icosaedro regular. Una forma de contarlas, es basado en el hecho de que 30 cuadrados tocan dos uniones triples, y se necesitan tres para hacer cada una, luego 30 * 2 / 3, da 20.
- **¿Cuántas aperturas pentagonales hay?**
  Respuesta: 12, corresponden a las 12 caras de un dodecaedro regular, calculado análogamente como 30 * 2 / 5.
- **¿Cuántos ejes de rotación quíntuples hay?**
  Respuesta: 6, cada uno conecta los centros de cada par de aperturas pentagonales.

Un posible proyecto avanzado, consiste en que los alumnos hagan sus propias plantillas usando, ya sea, regla y compás, o un programa de dibujo computacional. La clave, en muchos casos, es empezando por un polígono regular y encontrar puntos que dividen los lados en la razón áurea. Usted puede derivar esto de las propiedades áureas de una estrella pentagonal que forman los bordes. Los cortes donde las partes se encajan mutuamente deberían sumar el largo del segmento de intersección.

Si se desea, después de practicar con estos modelos del tamaño de un melón, la idea se podría aplicar a una escala mucho mayor. Diseños con cartulinas grandes, de cerca de un metro y medio (5 pies ~ 152,4 cm.) de diámetro, se han hecho por estudiantes de cursos diseño arquitectural, dictaros por la profesora Patricia Muñoz, en la universidad de Buenos Aires.

Al nivel de secundaria o superior, se pueden utilizar los modelos construidos para explorar temas de combinatoria, como el siguiente relativo a los 30 cuadrados:

- **¿Cuántos ciclos diferentes de cinco colores son posibles alrededor de una apertura pentagonal?**
  Respuesta: 24. Esto es 5!/5, dado que de las 5! Permutaciones de colores, se cuenta con cinco grupos para equiparar la rotación cíclica.
- **Entonces, ¿cuántos modelos diferentes de colores hay en la clase?**

Respuesta: 2, Si el orden del ciclo inicial de los cinco colores es elegido aleatoriamente, a priori la mitad del curso tendría un patrón de colores y la otra mitad el otro.

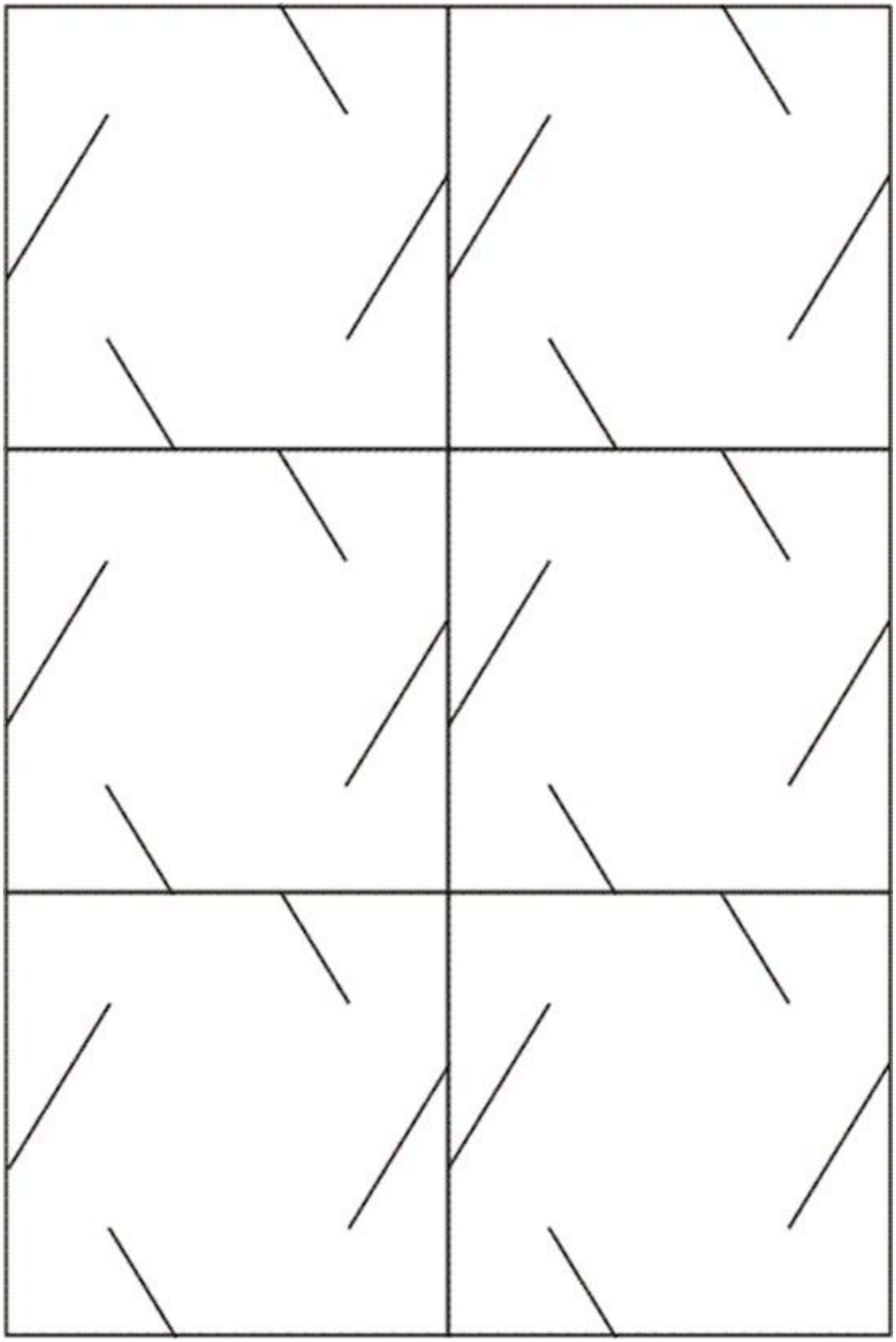
- **¿Qué determina cuáles 12 de los 24 órdenes cíclicos se encuentren en el mismo modelo?**
  Respuesta: Las permutaciones pares (o simétricas) de los cinco colores están en el mismo modelo.

Las plantillas que vienen a continuación, pueden ser copiadas libremente con usos educativos. Los profesores creativamente pueden, sin lugar a dudas, incorporar estas construcciones en clases de distintos niveles y en formas que ni se me hubieran ocurrido. Yo estaría en escuchar sobre cualquier experiencia, comentario o sugerencia.

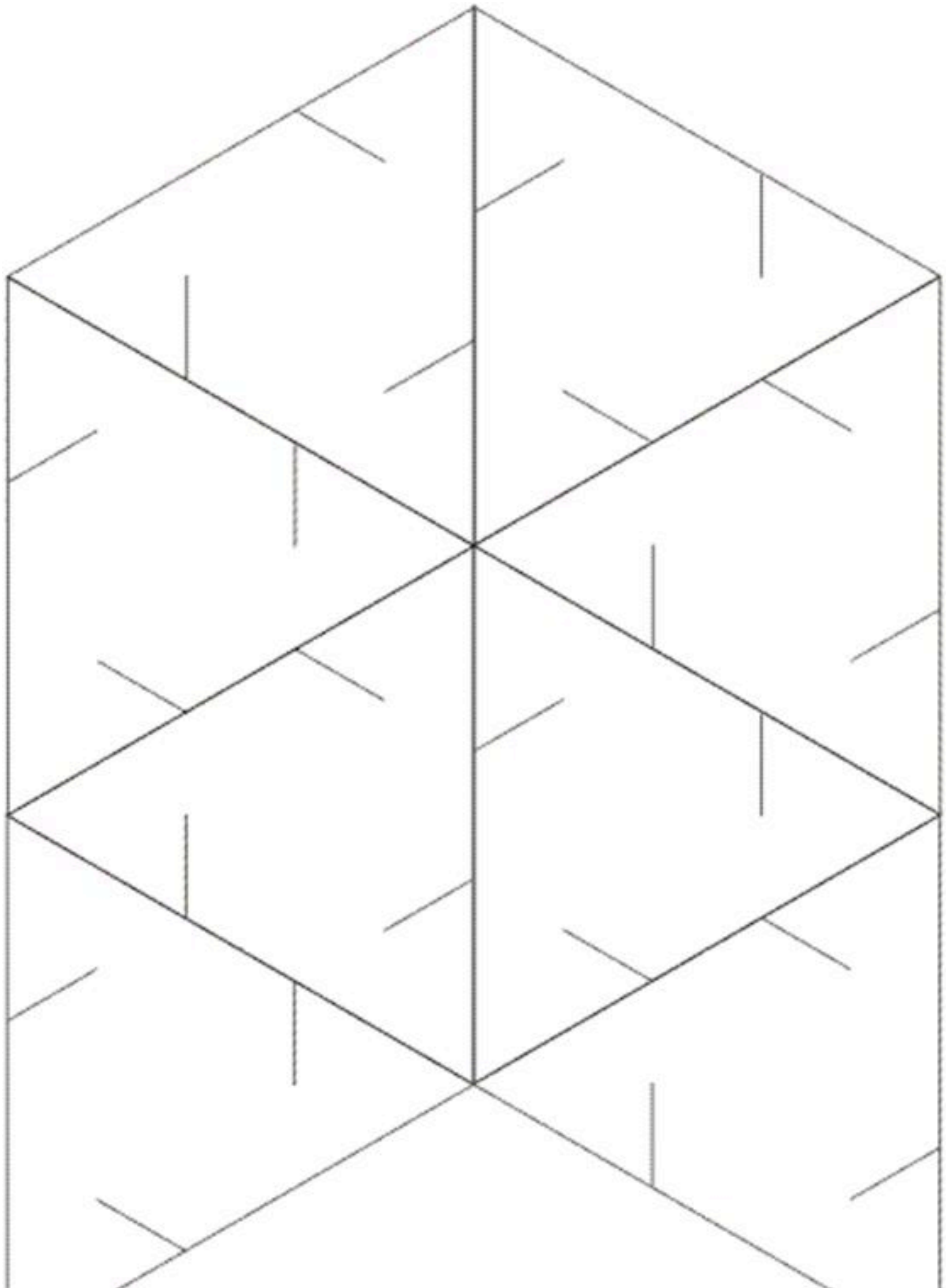
Referencias

[1] Charles Butler me describió el diseño del modelo de los triángulos y los cuadrados; los otros los diseñé como una extensión de esta idea, basado en el arreglo uniforme de poliedros.

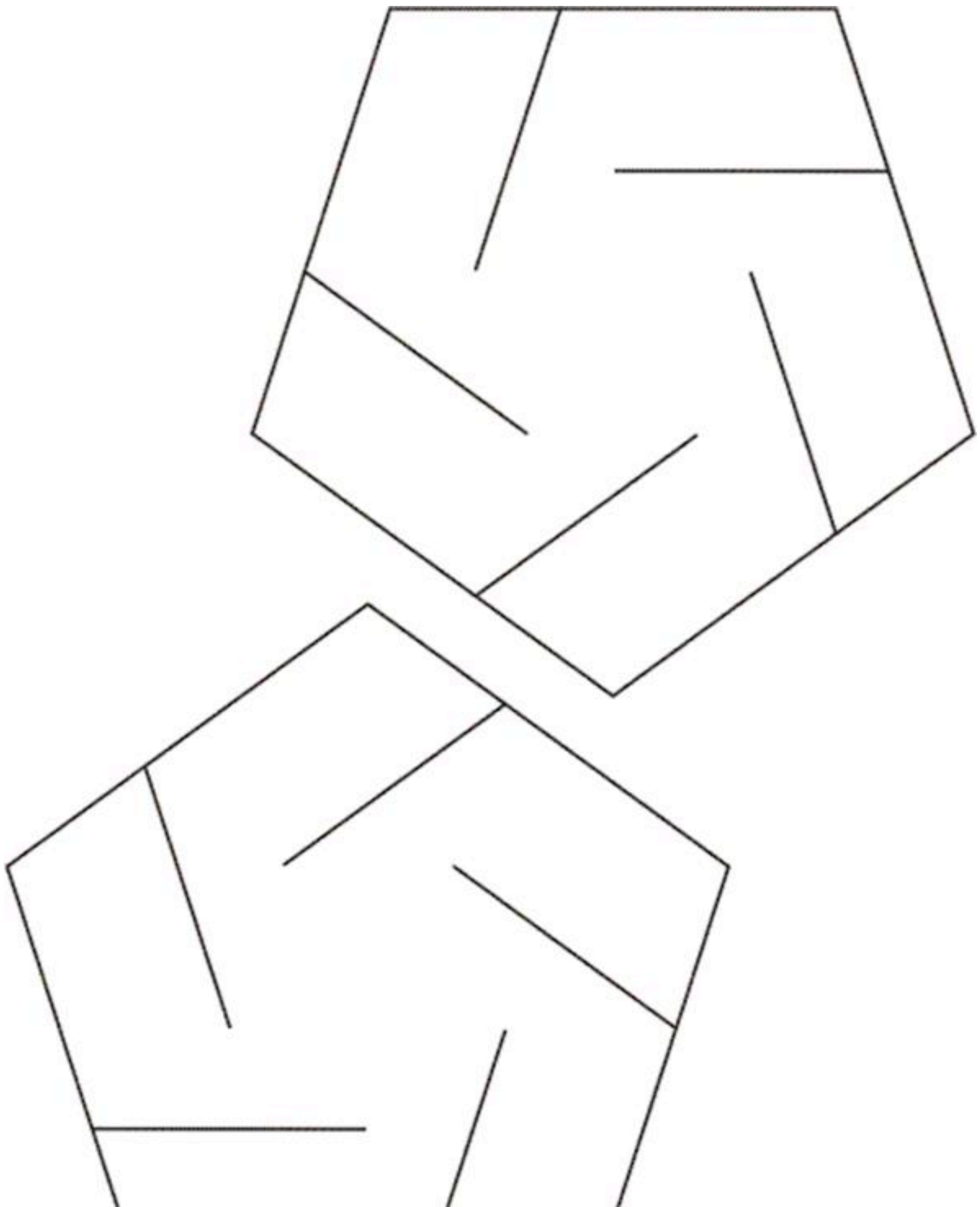
[2] He hecho modelados 3D de realidad virtual, de los siete modelos, disponibles en línea en http://www.georgehart.com. Con el plug-in apropiado, uno puede rotar estos diseños tres dimensiones en el navegador Web. Esto da un sentido mucho más rico de la estructura que las imágenes 2D incluidas más arriba, de manera que podría ser una mejor guía de armado.



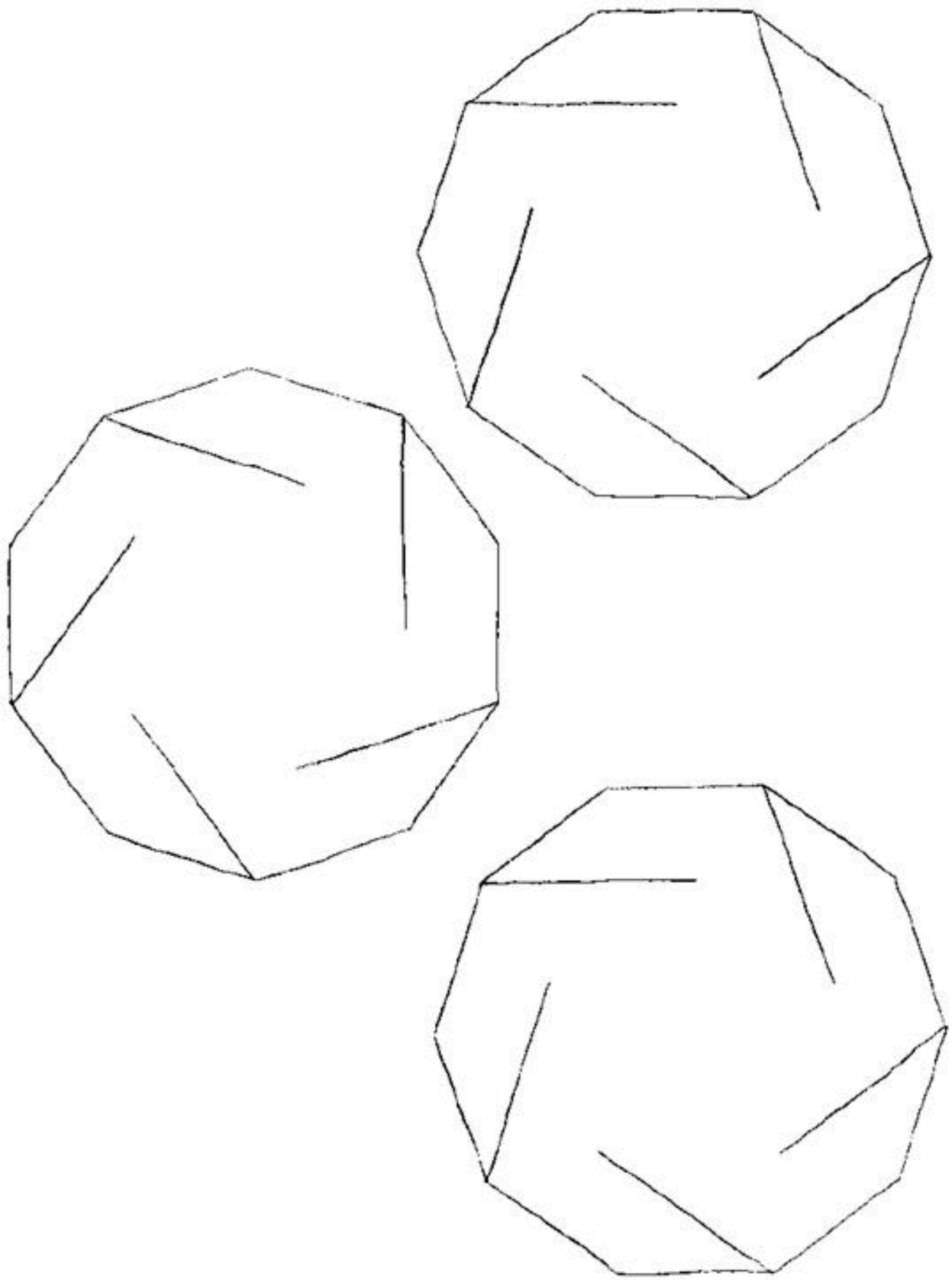
Plantilla de la estructura formada por cuadrados - haga cinco copias para un modelo



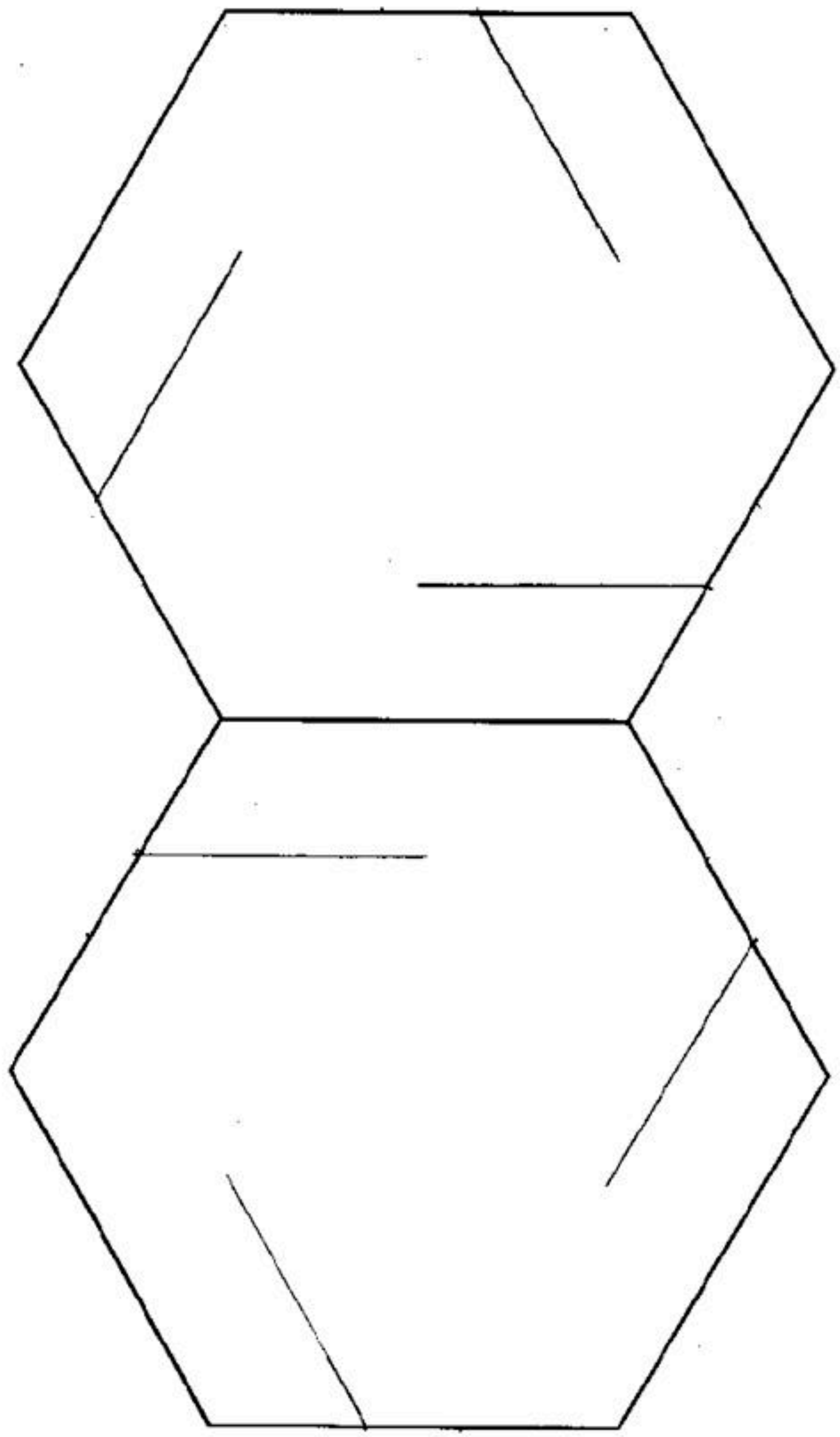
Plantilla de la estructura formada por triángulos - haga cinco copias para dos modelos



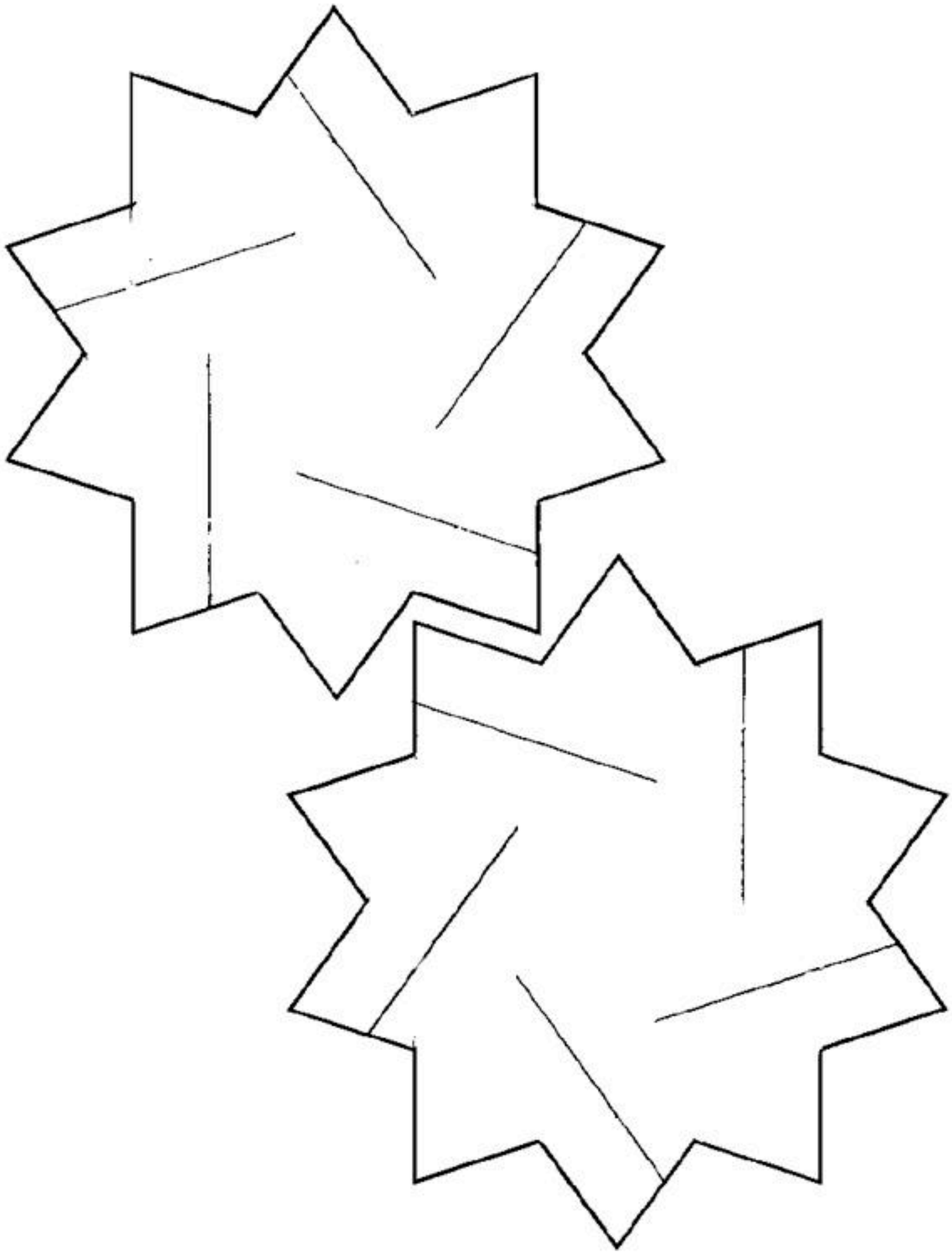
Plantilla de la estructura formada por pentágonos - haga seis copias para un modelo



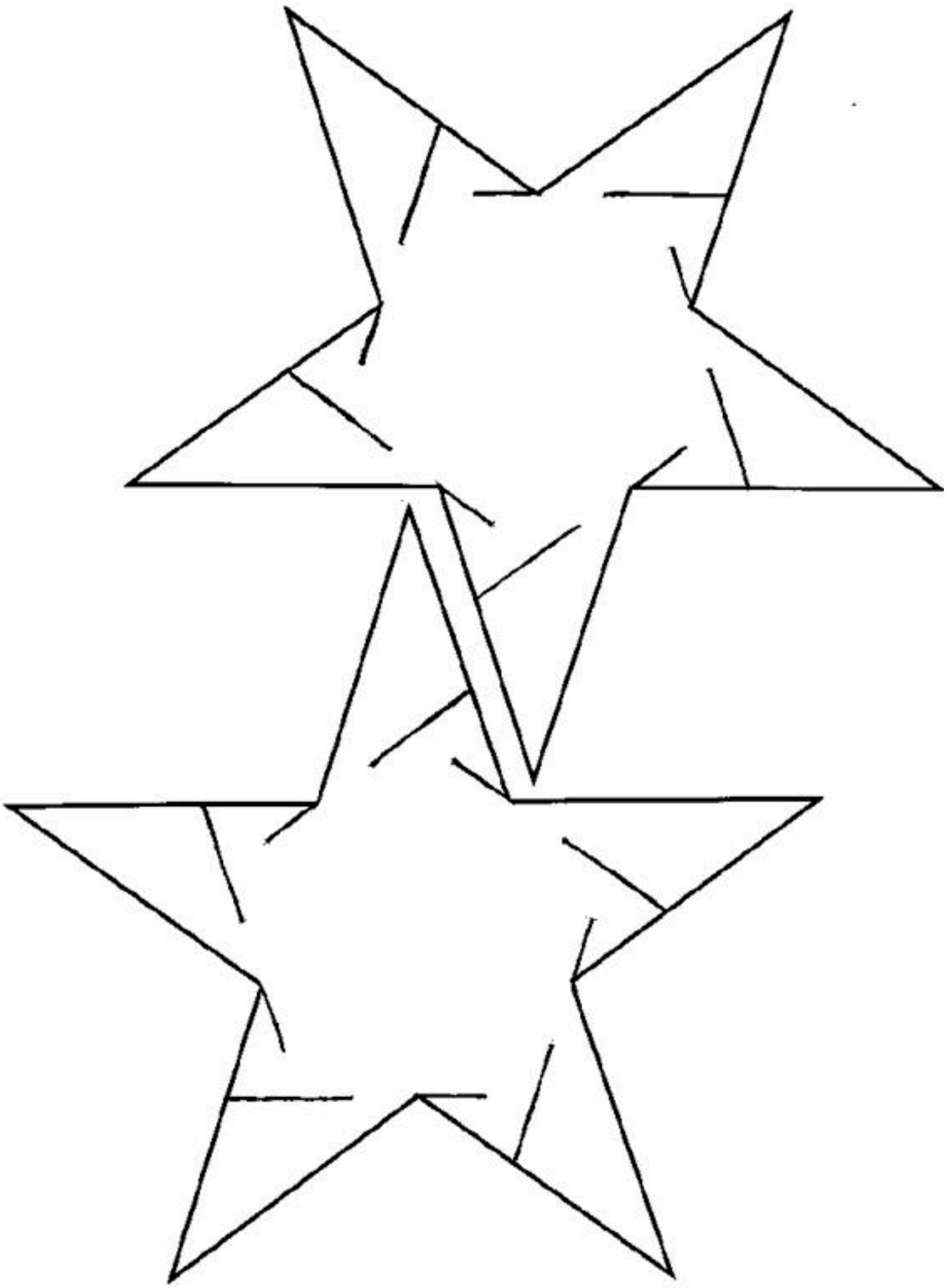
Planti
lla de la estructura formada por decágonos - haga seis copias para un modelo y medio



Plantilla de la estructura formada por hexágonos- haga diez copias para un modelo



Plantilla de la estructura formada por decagrama- haga seis copias para un modelo



Plantilla de la estructura formada por pentagrama- haga seis copias para un modelo