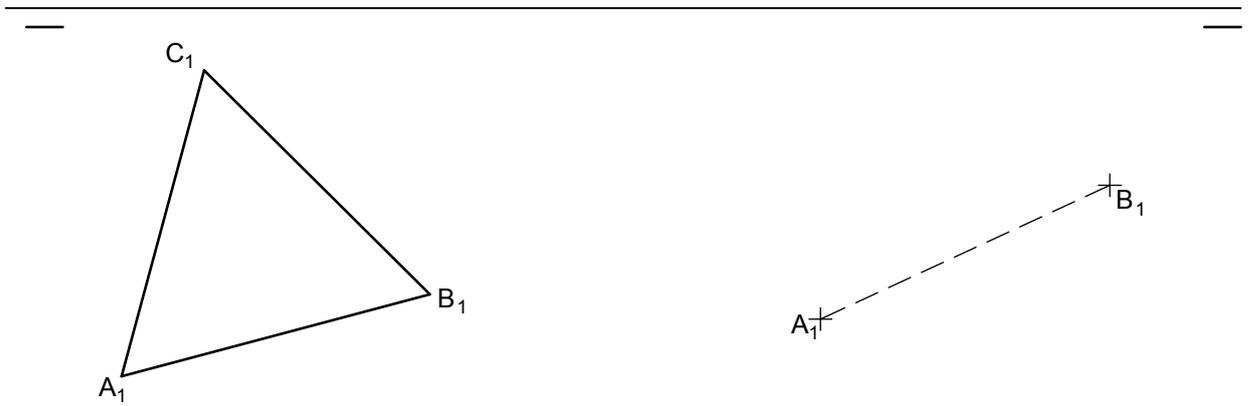


Dibujar los tetraedros, de igual arista, en las cuatro posiciones siguientes:

1. Apoyado por la cara ABC en el PH (la posición de la izquierda).
2. Con una arista, la AB en el PH y la opuesta horizontal.
3. Con un vértice él D en el PH y la altura del tetraedro vertical; se da la posición de la proyección horizontal de la recta donde está la arista DA.
4. Con una arista, la AB vertical. La proyección horizontal de la arista CD está a la izquierda de la arista AB y es paralela a la línea, s.

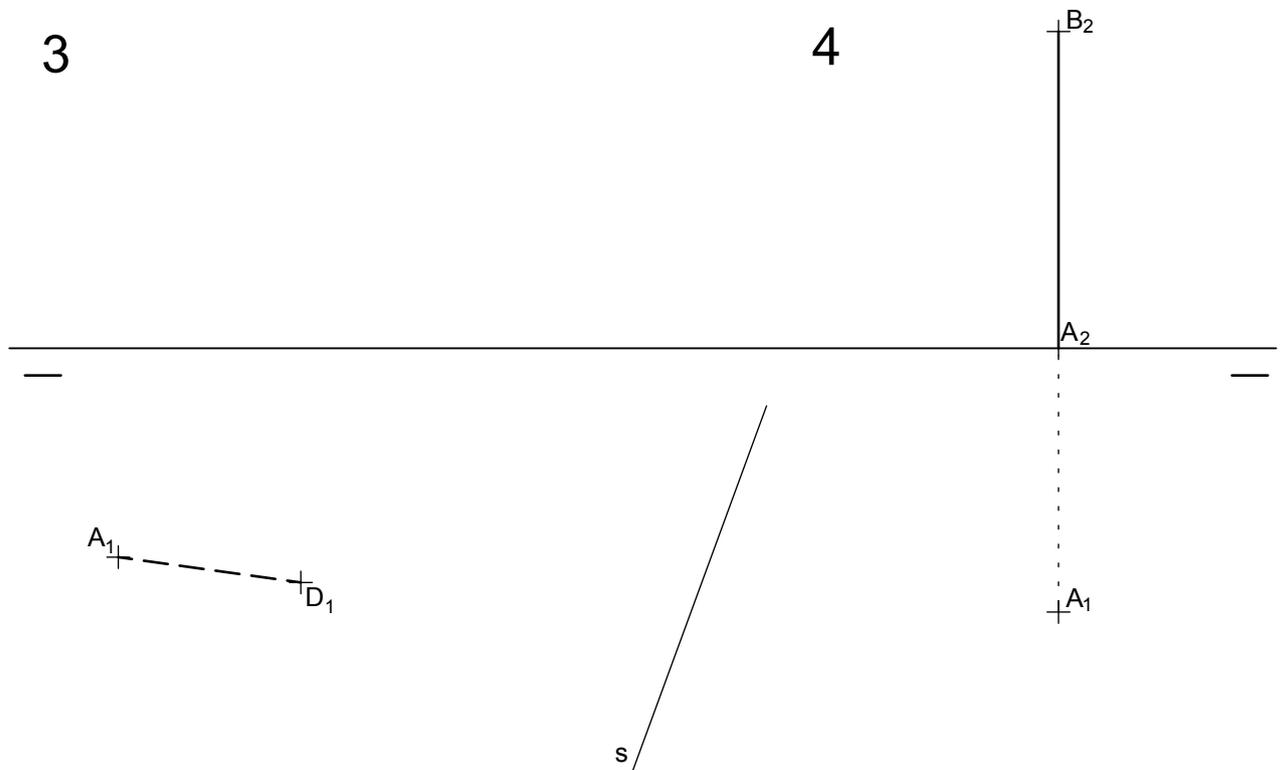
1

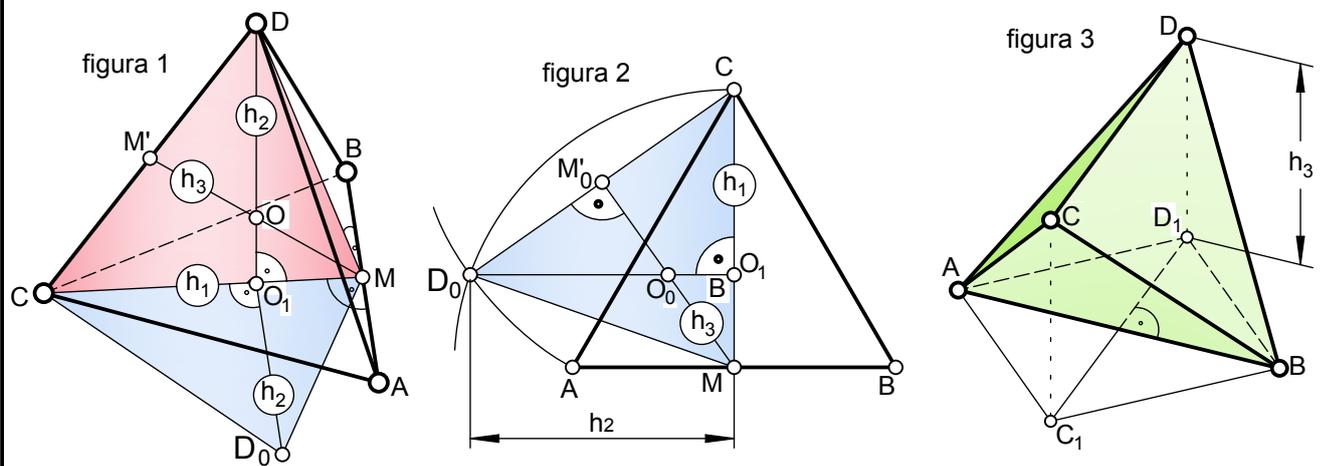
2



3

4





Antes de describir las proyecciones del tetraedro en las distintas posiciones propuestas, veamos algunas cuestiones geométricas básicas, sobre este cuerpo...

1. Es un poliedro regular (todas sus caras y ángulos, tanto diédros como en los vértices, son iguales), denominado platónico, por aparecer por primera vez nombrado en los diálogos del "Timeo" de este Filósofo griego, Platón (428- 347 a. C), que lo asocio con el fuego.
2. Tiene cuatro caras que son triángulos equiláteros, 4 vértices y 6 aristas.
3. Es dual de si mismo, es decir, si se unen los puntos medios de sus caras se obtiene otro tetraedro.
4. De las infinitas secciones que se le pueden hacer, nos ocuparemos ahora de una, la sección principal (figura 1), denominada así por que en ella se encuentran los principales elementos geométricos para definirlo, está formada por el corte de un plano que contiene a una arista y el punto medio de la opuesta. En la figura hemos tomado la CMD, donde tenemos los siguientes elementos, que son los que nos interesan ahora:
 - $h_1 = CM = DM$, altura de de la cara.
 - $h_2 = DO_1$, altura del tetraedro.
 - $h_3 = MM'$, distancia entre aristas opuestas.
5. Esta sección se puede abatir sobre el plano de la base, la cara ABC, para poder obtener las tres alturas indicadas antes, siguiendo el proceso mostrado en la figura 2:
6. Se dibuja el triángulo equilátero de lado la arista del tetraedro.
7. Con centro en M y radio $MC = h_1$, se dibuja un arco.
8. Con centro en C y radio $AC =$ arista del tetraedro, se dibuja otro arco que corta al anterior en D_0 , abatimiento del vértice D. Ya tenemos abatida la sección principal, donde $MC = h_1$, $D_0O_1 = h_2$ y $MM'_0 = h_3$. Esta construcción es muy importante.
9. Fijandonos en la figura 1, la sección principal CMD está en un plano, que es perpendicular a la arista AB, pues ésta es perpendicular a las alturas CM y DM de las caras ABC y ABD respectivamente, que definen el plano.
10. Deduciendo entonces que como la arista CD también está en la sección principal, es perpendicular a la arista AB, de esto podemos enunciar: "**las aristas opuestas de un tetraedro se cruzan perpendicularmente**". Esto último es importante para deducir las posiciones de las posiciones 2 y 4 propuestas.
11. Por último, basandonos en lo dicho antes, cuando un tetraedro (figura 3) esta apoyado por una de sus aristas y la opuesta es horizontal, se proyecta como un cuadrado, siendo su separación la altura h_3 .
12. En la naturaleza lo podemos encontrar en la molécula del metano, CH_4 , estando los hidrógenos en los vértices de un tetraedro y el carbono en el centro de éste. también se tienen noticias de unas bolas neolíticas de piedras labradas, encontradas en Escocia, con una antigüedad de 4000 años. En el siguiente enlace las podéis ver: http://en.wikipedia.org/wiki/Carved_Stone_Balls

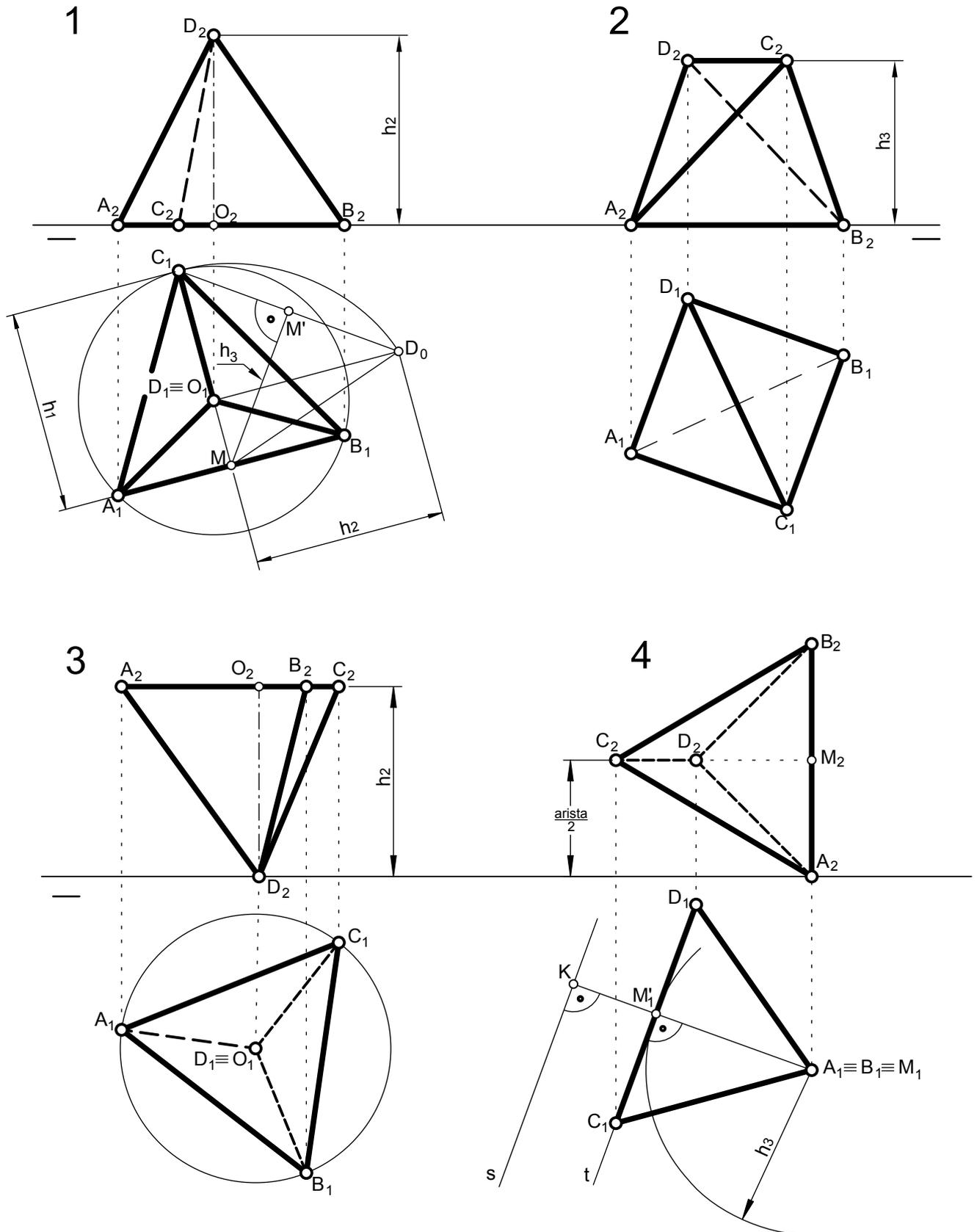
Vistos estos aspectos básicos, veamos el dibujo de las proyecciones, en las distintas posiciones propuestas:

Las partes vistas u ocultas, suponiendo los cuerpos opacos, se resuelve mediante las reglas siguientes para los cuerpos convexos:

- Los contornos aparentes (parte más externa de las proyecciones) tanto en proyección horizontal como vertical son vistas.
- En proyección horizontal son vistos aquellos elementos que tengan más cota que los planos del contorno aparente horizontal, visto en la proyección vertical. Los vértices de un contorno aparente no definen, en general, un solo plano, es una superficie poliedral abierta, en los cuerpos poliedrales y en los curvos puede ser una sucesión abierta de superficies mixtas, curvas y planas.
- En proyección vertical son vistos aquellos elementos que tengan más alejamiento que los planos del contorno aparente vertical, visto en la proyección horizontal.

Dibujar los tetraedros, de igual arista, en las cuatro posiciones siguientes:

1. Apoyado por la cara ABC en el PH (la posición de la izquierda).
2. Con una arista, la AB en el PH y la opuesta horizontal.
3. Con un vértice el D en el PH y la altura del tetraedro vertical; se da la posición de la proyección horizontal de la recta donde está la arista DA.
4. Con una arista, la AB vertical. La proyección horizontal de la arista CD está a la izquierda de la arista AB y es paralela a la línea, s.



Primera posición:

1. Se determina el centro O_1 del triángulo ABC, coincidente con la proyección D_1 , del vértice superior del tetraedro, uniendo dicha proyección con las de la base, tenemos la proyección horizontal del tetraedro.
2. Ahora se dibuja la construcción auxiliar vista en la figura 2, de la introducción, para determinar las alturas. esta construcción se puede hacer en el sistema o aparte, según convenga mejor.
3. Se obtienen las proyecciones verticales de los vértices de la base y del centro O_2 , que están en la LT.
4. Se dibuja a partir de esta proyección O_2 , una perpendicular a la LT.
5. Se lleva sobre la perpendicular anterior la altura h_2 , a partir de O_2 , obteniendo la proyección vertical D_2 del vértice D. Solo queda unir, dicha proyección con las de los otros vértices, para completar la proyección vertical del tetraedro. En este caso la arista CD en proyección vertical es oculta, pues tiene menos alejamiento que la cara ABD, que es vista.

Segunda posición:

En este caso la arista AB está en el PH, estando las proyecciones verticales de sus vértices en la LT. La otra arista CD, por lo dicho en la introducción, forma un ángulo recto con la AB y por ser horizontal, tendrá sus proyecciones verticales en una línea paralela a la LT, de cota h_3 y las horizontales en una perpendicular a A_1B_1 . Los pasos a seguir son:

1. Se dibuja un cuadrado de diagonal la proyección horizontal A_1B_1 , estando en los extremos de la otra diagonal las proyecciones horizontales de los vértices C_1 y D_1 .
2. Las proyecciones horizontales de los vértices A y B están en la LT.
3. Se dibujan por las proyecciones horizontales de los vértices C y D, las líneas de proyección, llevando sobre ellas a partir de la LT la altura h_3 , obteniendo las proyecciones verticales C_2 y D_2 . La altura h_3 se ha obtenido en la construcción auxiliar de la primera figura, Siendo $h_3 = MM'$.
4. Ahora solo queda unir convenientemente las proyecciones de los vértices, para obtener las proyecciones del tetraedro. En este caso en proyección horizontal es oculta la arista AB y en la vertical la BD, pues tiene menos alejamiento que la AC con la que se cruza.

Tercera posición:

La tercera posición es similar a la primera, pero con el vértice D en el PH y los otros tres tiene de cota h_2 .

1. Al darnos la proyección horizontal de la arista AD, para poder dibujar las otras: DC y DB, hay que dibujar una circunferencia de centro D_1 y radio D_1A_1 .
2. Se gira dos veces consecutivas la proyección dada 120° , obteniendo las proyecciones C_1 y B_1 .
3. La vertical, D_2 , del vértice D está en la LT. Las verticales de los otros vértices tienen de cota h_2 .
4. En proyección horizontal son ocultas las aristas laterales: AD, BD y CD. En proyección vertical todas son vistas.

Cuarta posición:

- Por lo dicho en la introducción, la arista opuesta a otra está contenida en un plano perpendicular a la otra y viceversa, de esto se deduce que si una de las aristas, la AB según el enunciado, es vertical, la otra tiene que ser horizontal, pues todo plano perpendicular a una recta vertical es horizontal.
- La cota de dicha arista horizontal, tiene que ser la mitad de la magnitud de la arista, pues el plano horizontal que la contiene, pasa por el punto medio de la arista AB.
- La separación entre las dos aristas es la altura h_3 , que por ser también horizontal, se proyecta horizontalmente en verdadera magnitud. De todo lo dicho tenemos los argumentos necesarios para poder dibujar el tetraedro en la posición pedida, siendo los pasos los siguientes:

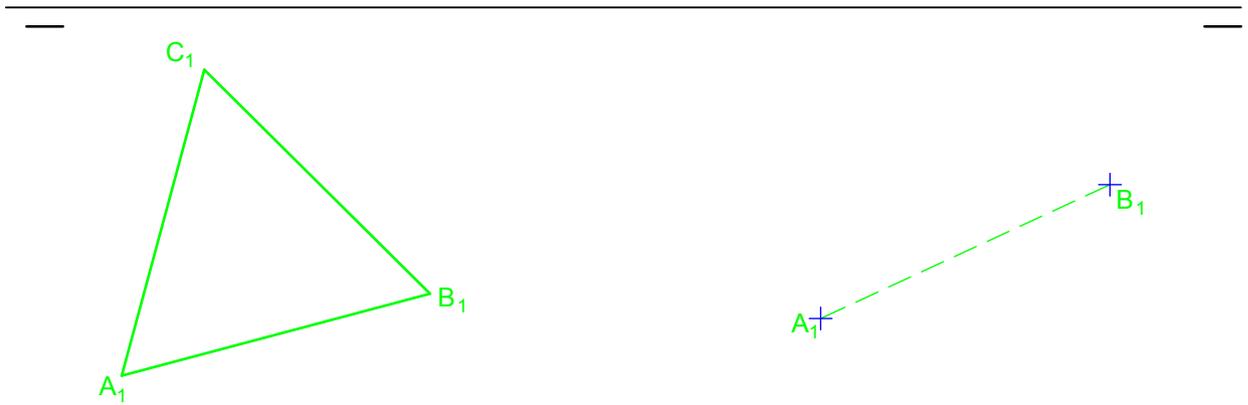
1. Por ser la arista AB vertical, las proyecciones horizontales, A_1 y B_1 , coinciden.
2. Como la distancia entre las aristas es h_3 , se dibuja con centro en $A_1=B_1$ un arco de radio dicha distancia.
3. Como la arista CD es paralela a la recta s, se dibuja una línea, t, paralela a la recta s y que sea tangente al arco de circunferencia dibujado antes, siendo el punto de tangencia la proyección horizontal, M'_1 , del punto medio de la arista CD.
4. A partir de la proyección, M'_1 , y a ambos lados de él, se lleva sobre la línea, t, la mitad de la arista, obteniendo las proyecciones, C_1 y D_1 , de los vértices de la arista opuesta.
5. desde las proyecciones obtenidas en el paso anterior, se dibujan las líneas de proyección, llevando sobre ellas a partir de la LT, la mitad de la longitud de la arista, obteniendo las proyecciones verticales, C_2 y D_2 .
6. Se unen convenientemente, tanto las proyecciones horizontales como las verticales, para tener la representación del tetraedro. En este caso la proyección horizontal es toda vista y en la vertical, las aristas que contienen el vértice C son ocultas.

Dibujar los tetraedros, de igual arista, en las cuatro posiciones siguientes:

1. Apoyado por la cara ABC en el PH (la posición de la izquierda).
2. Con una arista, la AB en el PH y la opuesta horizontal.
3. Con un vértice él D en el PH y la altura del tetraedro vertical; se da la posición de la proyección horizontal de la recta donde está la arista DA.
4. Con una arista, la AB vertical. La proyección horizontal de la arista CD está a la izquierda de la arista AB y es paralela a la línea, s.

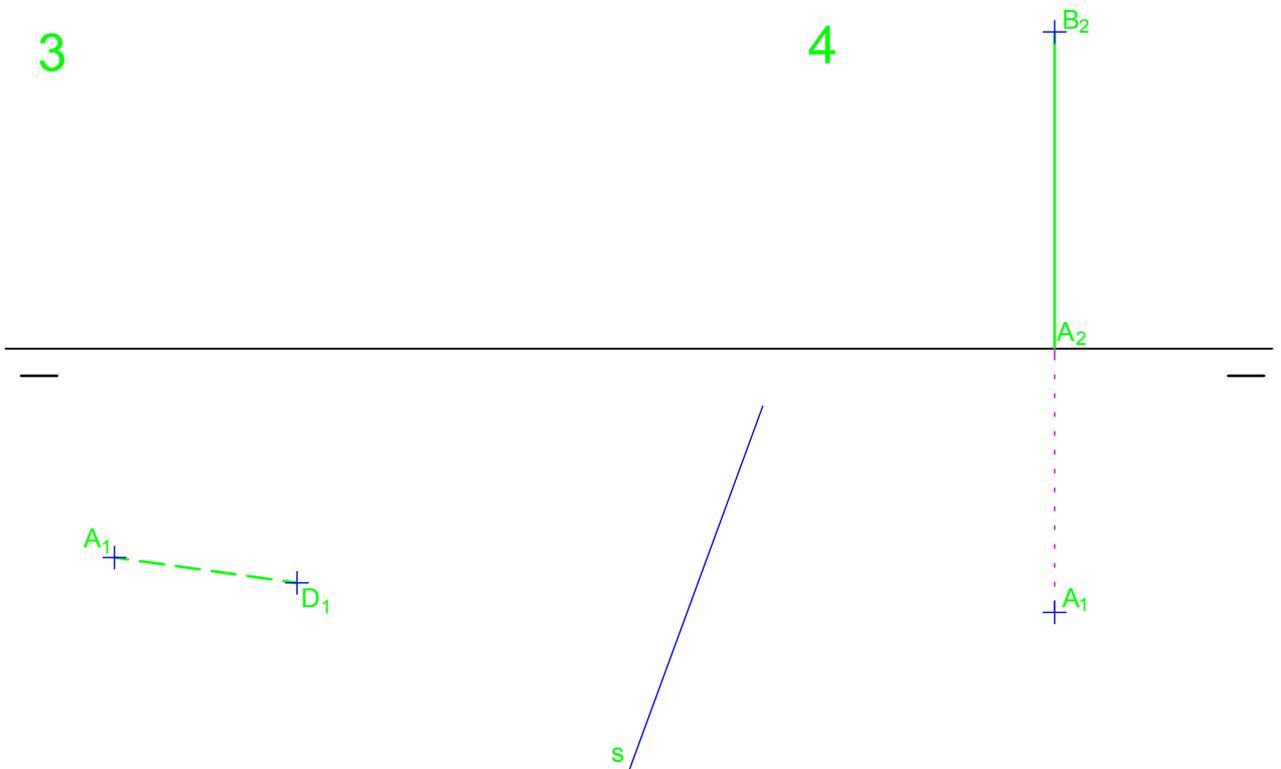
1

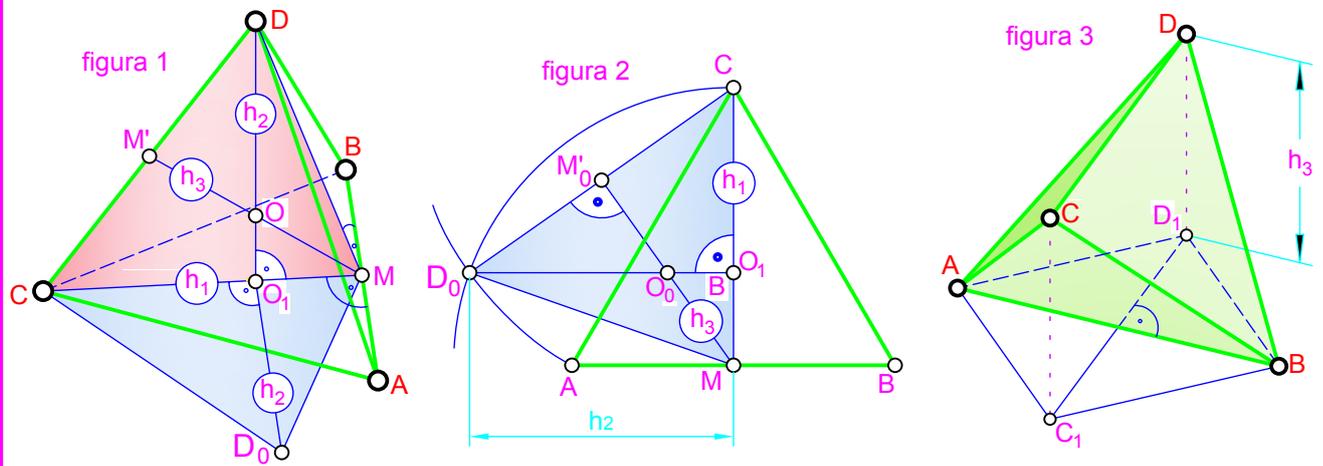
2



3

4





Antes de describir las proyecciones del tetraedro en las distintas posiciones propuestas, veamos algunas cuestiones geométricas básicas, sobre este cuerpo...

1. Es un poliedro regular (todas sus caras y ángulos, tanto diédros como en los vértices, son iguales), denominado platónico, por aparecer por primera vez nombrado en los diálogos del "Timeo" de este Filósofo griego, Platón (428- 347 a. C), que lo asocio con el fuego.
2. Tiene cuatro caras que son triángulos equiláteros, 4 vértices y 6 aristas.
3. Es dual de si mismo, es decir, si se unen los puntos medios de sus caras se obtiene otro tetraedro.
4. De las infinitas secciones que se le pueden hacer, nos ocuparemos ahora de una, la sección principal (figura 1), denominada así por que en ella se encuentran los principales elementos geométricos para definirlo, está formada por el corte de un plano que contiene a una arista y el punto medio de la opuesta. En la figura hemos tomado la CMD, donde tenemos los siguientes elementos, que son los que nos interesan ahora:
 - $h_1 = CM = DM$, altura de de la cara.
 - $h_2 = DO_1$, altura del tetraedro.
 - $h_3 = MM'$, distancia entre aristas opuestas.
5. Esta sección se puede abatir sobre el plano de la base, la cara ABC, para poder obtener las tres alturas indicadas antes, siguiendo el proceso mostrado en la figura 2:
6. Se dibuja el triángulo equilátero de lado la arista del tetraedro.
7. Con centro en M y radio $MC = h_1$, se dibuja un arco.
8. Con centro en C y radio $AC =$ arista del tetraedro, se dibuja otro arco que corta al anterior en D_0 , abatimiento del vértice D. Ya tenemos abatida la sección principal, donde $MC = h_1$, $D_0O_1 = h_2$ y $MM'_0 = h_3$. Esta construcción es muy importante.
9. Fijandonos en la figura 1, la sección principal CMD está en un plano, que es perpendicular a la arista AB, pues ésta es perpendicular a las alturas CM y DM de las caras ABC y ABD respectivamente, que definen el plano.
10. Deduciendo entonces que como la arista CD también está en la sección principal, es perpendicular a la arista AB, de esto podemos enunciar: "**las aristas opuestas de un tetraedro se cruzan perpendicularmente**". Esto último es importante para deducir las posiciones de las posiciones 2 y 4 propuestas.
11. Por último, basandonos en lo dicho antes, cuando un tetraedro (figura 3) esta apoyado por una de sus aristas y la opuesta es horizontal, se proyecta como un cuadrado, siendo su separación la altura h_3 .
12. En la naturaleza lo podemos encontrar en la molécula del metano, CH_4 , estando los hidrógenos en los vértices de un tetraedro y el carbono en el centro de éste. también se tienen noticias de unas bolas neolíticas de piedras labradas, encontradas en Escocia, con una antigüedad de 4000 años. En el siguiente enlace las podéis ver: http://en.wikipedia.org/wiki/Carved_Stone_Balls

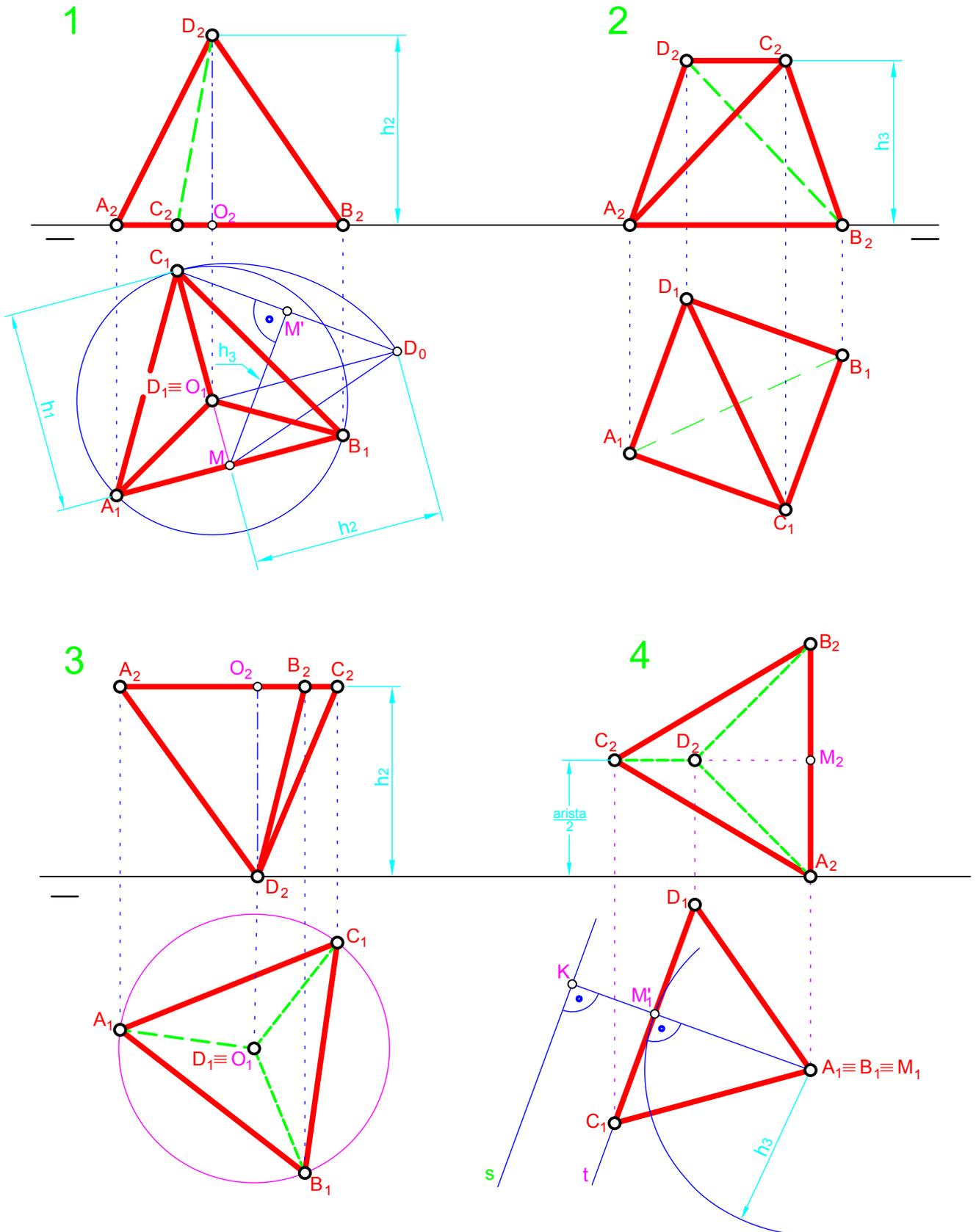
Vistos estos aspectos básicos, veamos el dibujo de las proyecciones, en las distintas posiciones propuestas:

Las partes vistas u ocultas, suponiendo los cuerpos opacos, se resuelve mediante las reglas siguientes para los cuerpos convexos:

- *Los contornos aparentes (parte más externa de las proyecciones) tanto en proyección horizontal como vertical son vistas.*
- *En proyección horizontal son vistos aquellos elementos que tengan más cota que los planos del contorno aparente horizontal, visto en la proyección vertical. Los vértices de un contorno aparente no definen, en general, un solo plano, es una superficie poliedral abierta, en los cuerpos poliedrales y en los curvos puede ser una sucesión abierta de superficies mixtas, curvas y planas.*
- *En proyección vertical son vistos aquellos elementos que tengan más alejamiento que los planos del contorno aparente vertical, visto en la proyección horizontal.*

Dibujar los tetraedros, de igual arista, en las cuatro posiciones siguientes:

1. Apoyado por la cara ABC en el PH (la posición de la izquierda).
2. Con una arista, la AB en el PH y la opuesta horizontal.
3. Con un vértice el D en el PH y la altura del tetraedro vertical; se da la posición de la proyección horizontal de la recta donde está la arista DA.
4. Con una arista, la AB vertical. La proyección horizontal de la arista CD está a la izquierda de la arista AB y es paralela a la línea, s.



Primera posición:

1. Se determina el centro O_1 del triángulo ABC, coincidente con la proyección D_1 , del vértice superior del tetraedro, uniendo dicha proyección con las de la base, tenemos la proyección horizontal del tetraedro.
2. Ahora se dibuja la construcción auxiliar vista en la figura 2, de la introducción, para determinar las alturas. esta construcción se puede hacer en el sistema o aparte, según convenga mejor.
3. Se obtienen las proyecciones verticales de los vértices de la base y del centro O_2 , que están en la LT.
4. Se dibuja a partir de esta proyección O_2 , una perpendicular a la LT.
5. Se lleva sobre la perpendicular anterior la altura h_2 , a partir de O_2 , obteniendo la proyección vertical D_2 del vértice D. Solo queda unir, dicha proyección con las de los otros vértices, para completar la proyección vertical del tetraedro. En este caso la arista CD en proyección vertical es oculta, pues tiene menos alejamiento que la cara ABD, que es vista.

Segunda posición:

En este caso la arista AB está en el PH, estando las proyecciones verticales de sus vértices en la LT. La otra arista CD, por lo dicho en la introducción, forma un ángulo recto con la AB y por ser horizontal, tendrá sus proyecciones verticales en una línea paralela a la LT, de cota h_3 y las horizontales en una perpendicular a A_1B_1 . Los pasos a seguir son:

1. Se dibuja un cuadrado de diagonal la proyección horizontal A_1B_1 , estando en los extremos de la otra diagonal las proyecciones horizontales de los vértices C_1 y D_1 .
2. Las proyecciones horizontales de los vértices A y B están en la LT.
3. Se dibujan por las proyecciones horizontales de los vértices C y D, las líneas de proyección, llevando sobre ellas a partir de la LT la altura h_3 , obteniendo las proyecciones verticales C_2 y D_2 . La altura h_3 se ha obtenido en la construcción auxiliar de la primera figura, Siendo $h_3 = MM'$.
4. Ahora solo queda unir convenientemente las proyecciones de los vértices, para obtener las proyecciones del tetraedro. En este caso en proyección horizontal es oculta la arista AB y en la vertical la BD, pues tiene menos alejamiento que la AC con la que se cruza.

Tercera posición:

La tercera posición es similar a la primera, pero con el vértice D en el PH y los otros tres tiene de cota h_2 .

1. Al darnos la proyección horizontal de la arista AD, para poder dibujar las otras: DC y DB, hay que dibujar una circunferencia de centro D_1 y radio D_1A_1 .
2. Se gira dos veces consecutivas la proyección dada 120° , obteniendo las proyecciones C_1 y B_1 .
3. La vertical, D_2 , del vértice D está en la LT. Las verticales de los otros vértices tienen de cota h_2 .
4. En proyección horizontal son ocultas las aristas laterales: AD, BD y CD. En proyección vertical todas son vistas.

Cuarta posición:

- Por lo dicho en la introducción, la arista opuesta a otra está contenida en un plano perpendicular a la otra y viceversa, de esto se deduce que si una de las aristas, la AB según el enunciado, es vertical, la otra tiene que ser horizontal, pues todo plano perpendicular a una recta vertical es horizontal.
- La cota de dicha arista horizontal, tiene que ser la mitad de la magnitud de la arista, pues el plano horizontal que la contiene, pasa por el punto medio de la arista AB.
- La separación entre las dos aristas es la altura h_3 , que por ser también horizontal, se proyecta horizontalmente en verdadera magnitud. De todo lo dicho tenemos los argumentos necesarios para poder dibujar el tetraedro en la posición pedida, siendo los pasos los siguientes:

1. Por ser la arista AB vertical, las proyecciones horizontales, A_1 y B_1 , coinciden.
2. Como la distancia entre las aristas es h_3 , se dibuja con centro en $A_1=B_1$ un arco de radio dicha distancia.
3. Como la arista CD es paralela a la recta s, se dibuja una línea, t, paralela a la recta s y que sea tangente al arco de circunferencia dibujado antes, siendo el punto de tangencia la proyección horizontal, M'_1 , del punto medio de la arista CD.
4. A partir de la proyección, M'_1 , y a ambos lados de él, se lleva sobre la línea, t, la mitad de la arista, obteniendo las proyecciones, C_1 y D_1 , de los vértices de la arista opuesta.
5. desde las proyecciones obtenidas en el paso anterior, se dibujan las líneas de proyección, llevando sobre ellas a partir de la LT, la mitad de la longitud de la arista, obteniendo las proyecciones verticales, C_2 y D_2 .
6. Se unen convenientemente, tanto las proyecciones horizontales como las verticales, para tener la representación del tetraedro. En este caso la proyección horizontal es toda vista y en la vertical, las aristas que contienen el vértice C son ocultas.