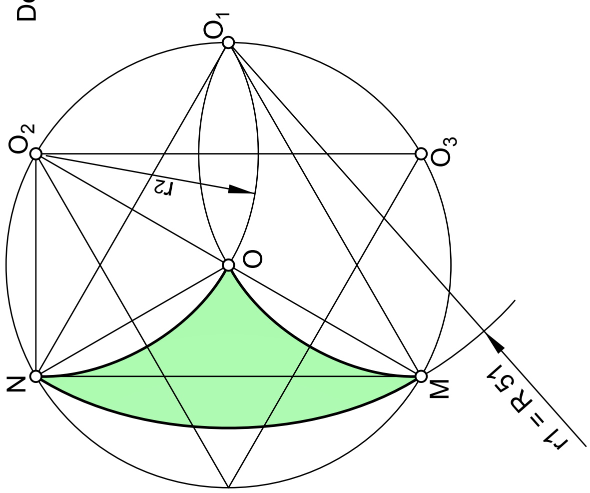
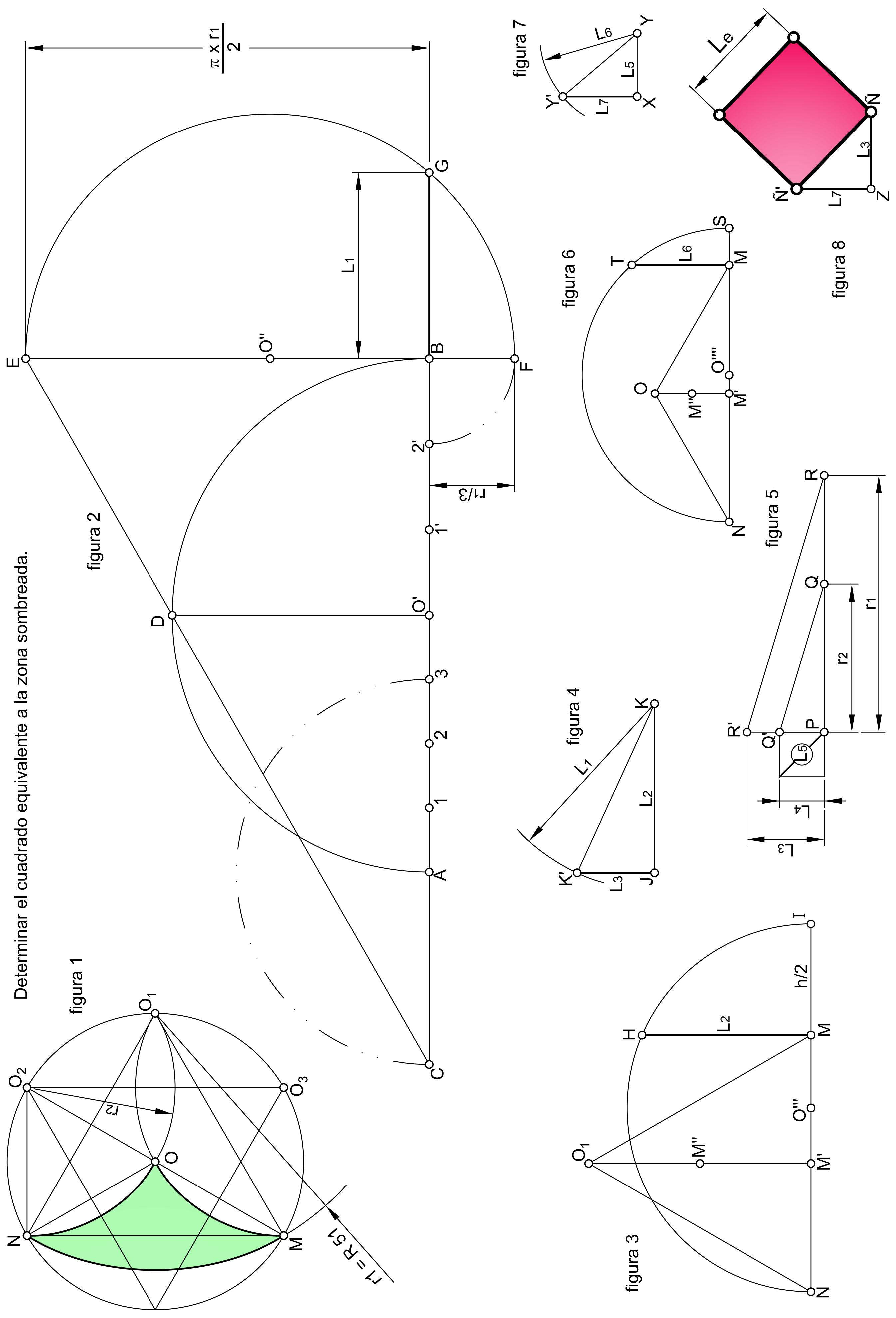
Determinar el cuadrado equivalente a la zona sombreada.



Equivalencia 3- Selectividad 2009

Determinar el cuadrado equivalente a la zona sombreada.



Equivalencia 3- Selectividad 2009

Hoja 1/2

La zona que se quiere cuadrar (figura 1), está formada por la intersección de los arcos de centros O_1, O_2 y O_3 y radios r_1 y r_2 respectivamente.

Analicemos la figura 1:

- Para el área podemos dividir la zona sombreada en el segmento circular MN de radio r_1 y el triángulo mixtílineo MNO.
- El segmento circular MN es resultado de restar al sector circular MO_1N el triángulo equilátero MO_1N.
- El triángulo mixtilíneo resulta de restar al triángulo isósceles MNO los dos segmentos circulares ON y OM de radio r_2.
- Al igual que todas las circunferencias son semejantes, los segmentos circulares, de igual ángulo, también lo son; en nuestro caso él MN de radio r_1 y el MO y NO de radio r_2.
- El sector circular MO_1N de radio r_1, es la sexta parte del circulo del mismo radio. Realizando unos cálculos geométricos, el área del sector circular es:

$$\frac{\pi \times r_1^2}{6} = \frac{\pi \times r_1}{2} \times \frac{r_1}{3} = L_1^2$$

  es decir, tenemos la media proporcional entre los valores $(\pi \times r_1)/2$ y $r_1/3$, siendo el primero la rectificación del cuarto de circunferencia y el segundo termino, la tercera parte del radio r_1.

Dicho esto el proceso a seguir es el siguiente:

Cuadratura del segmento circular MN.

1. Se dibuja (figura 2) con centro O', la semicircunferencia AB de radio r_1.
2. Se divide el radio AO_1 en cuatro partes iguales, llevando tres de esas partes a la izquierda del punto A, obteniendo el punto C.
3. Se dibuja por B una línea perpendicular al diámetro AB y por O' el radio O'D, también perpendicular a AB.
4. Se prolonga la línea CD, que corta a la perpendicular por B, en el punto E. El segmento BE es el cuarto de la circunferencia, es decir, $(\pi \times r_1)/2$.
5. Se divide el radio O'B en tres partes partes iguales, llevando una de ellas en la prolongación del segmento BE, obteniendo el punto F.
6. Se dibuja la semicircunferencia de diámetro EF.
7. Se prolonga el diámetro AB, que corta a la semicircunferencia anterior, en el punto G. el segmento BG es el lado L_1, del cuadrado equivalente al sector circular MO_1N.

8. Se cuadra (figura 3) el triángulo MO_1N por el procedimiento de la media proporcional entre sus base, él MN, y la mitad de la altura h/2, él M'M'', obteniendo el lado L_2.

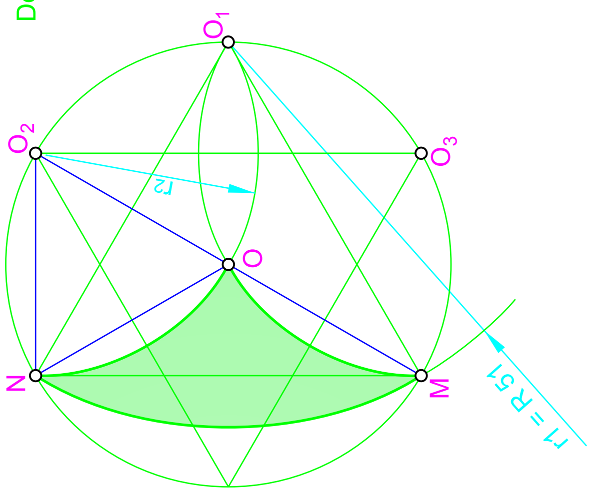
9. Ahora aplicando Pitágoras (figura 4), tomando L_2 como cateto y L_1 como hipotenusa, se obtiene L_3, lado del cuadrado equivalente al segmento circular MN de radio r_1.

Cuadratura del triángulo mixtilineo MON.

10. Aplicando la semejanza (figura 5) entre los radios, r_1 y r_2 y el lado L_3, para obtener el lado L_4; dibujando el triángulo PRR' de catetos r_1 y L_3 y el semejante a él PQQ'. De esta manera se ha obtenido el lado, L_4, del cuadrado equivalente del segmento circular OM de radio r_2, semejante al MN de radio r_1.
11. Como al triángulo MON, le queremos restar los dos segmentos circulares, MO y NO de radios r_2, se ha dibujado el cuadrado de lado PQ', cuya diagonal nos da el lado L_5 de los dos segmentos.
12. Se cuadra (figura 6) el triángulo NMO obteniendo el lado L_6.
13. Aplicando nuevamente Pitágoras (figura 7), al triángulo XYY', siendo el cateto el lado L_5 y la hipotenusa L_6, se obtiene el lado L_7, lado del cuadrado equivalente al triángulo mixtilíneo NOM.

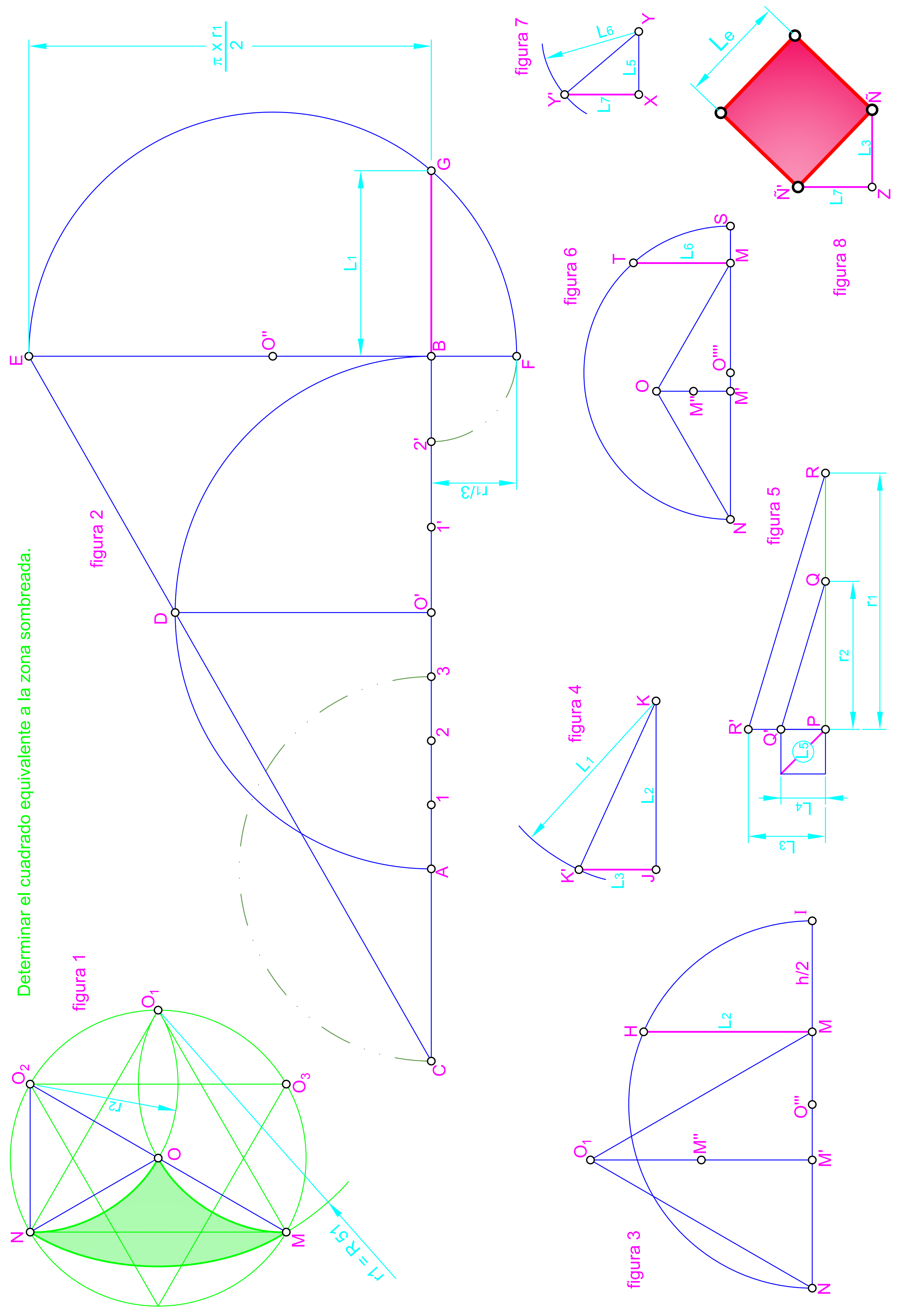
14. Por último (figura 8), solo queda, aplicar nuevamente Pitágoras al triángulo ZÑÑ', siendo los catetos los lados L_7 y L_3, para obtener L_e, lado del cuadrado equivalente, por fin, a la zona sombreada.

Determinar el cuadrado equivalente a la zona sombreada.



Equivalencia 3- Selectividad 2009

Determinar el cuadrado equivalente a la zona sombreada.



Equivalencia 3- Selectividad 2009

Hoja 1/2

La zona que se quiere cuadrar (figura 1), está formada por la intersección de los arcos de centros O_1, O_2 y O_3 y radios r_1 y r_2 respectivamente.

Analicemos la figura 1:

- Para el área podemos dividir la zona sombreada en el segmento circular MN de radio r_1 y el triángulo mixtílineo MNO.
- El segmento circular MN es resultado de restar al sector circular MO_1N el triángulo equilátero MO_1N.
- El triángulo mixtilíneo resulta de restar al triángulo isósceles MNO los dos segmentos circulares ON y OM de radio r_2.
- Al igual que todas las circunferencias son semejantes, los segmentos circulares, de igual ángulo, también lo son; en nuestro caso él MN de radio r_1 y el MO y NO de radio r_2.
- El sector circular MO_1N de radio r_1, es la sexta parte del circulo del mismo radio. Realizando unos cálculos geométricos, el área del sector circular es:

$$\frac{\pi \times r_1^2}{6} = \frac{\pi \times r_1}{2} \times \frac{r_1}{3} = L_1^2$$

es decir, tenemos la media proporcional entre los valores $(\pi \times r_1)/2$ y $r_1/3$, siendo el primero la rectificación del cuarto de circunferencia y el segundo termino, la tercera parte del radio r_1.

Dicho esto el proceso a seguir es el siguiente:

Cuadratura del segmento circular MN.

1. Se dibuja (figura 2) con centro O', la semicircunferencia AB de radio r_1.
2. Se divide el radio AO_1 en cuatro partes iguales, llevando tres de esas partes a la izquierda del punto A, obteniendo el punto C.
3. Se dibuja por B una línea perpendicular al diámetro AB y por O' el radio O'D, también perpendicular a AB.
4. Se prolonga la línea CD, que corta a la perpendicular por B, en el punto E. El segmento BE es el cuarto de la circunferencia, es decir, $(\pi \times r_1)/2$.
5. Se divide el radio O'B en tres partes partes iguales, llevando una de ellas en la prolongación del segmento BE, obteniendo el punto F.
6. Se dibuja la semicircunferencia de diámetro EF.
7. Se prolonga el diámetro AB, que corta a la semicircunferencia anterior, en el punto G. el segmento BG es el lado L_1, del cuadrado equivalente al sector circular MO_1N.

8. Se cuadra (figura 3) el triángulo MO_1N por el procedimiento de la media proporcional entre sus base, él MN, y la mitad de la altura h/2, él M'M'', obteniendo el lado L_2.

9. Ahora aplicando Pitágoras (figura 4), tomando L_2 como cateto y L_1 como hipotenusa, se obtiene L_3, lado del cuadrado equivalente al segmento circular MN de radio r_1.

Cuadratura del triángulo mixtilineo MON.

10. Aplicando la semejanza (figura 5) entre los radios, r_1 y r_2 y el lado L_3, para obtener el lado L_4; dibujando el triángulo PRR' de catetos r_1 y L_3 y el semejante a él PQQ'. De esta manera se ha obtenido el lado, L_4, del cuadrado equivalente del segmento circular OM de radio r_2, semejante al MN de radio r_1.
11. Como al triángulo MON, le queremos restar los dos segmentos circulares, MO y NO de radios r_2, se ha dibujado el cuadrado de lado PQ', cuya diagonal nos da el lado L_5 de los dos segmentos.
12. Se cuadra (figura 6) el triángulo NMO obteniendo el lado L_6.
13. Aplicando nuevamente Pitágoras (figura 7), al triángulo XYY', siendo el cateto el lado L_5 y la hipotenusa L_6, se obtiene el lado L_7, lado del cuadrado equivalente al triángulo mixtilíneo NOM.

14. Por último (figura 8), solo queda, aplicar nuevamente Pitágoras al triángulo ZÑÑ', siendo los catetos los lados L_7 y L_3, para obtener L_e, lado del cuadrado equivalente, por fin, a la zona sombreada.