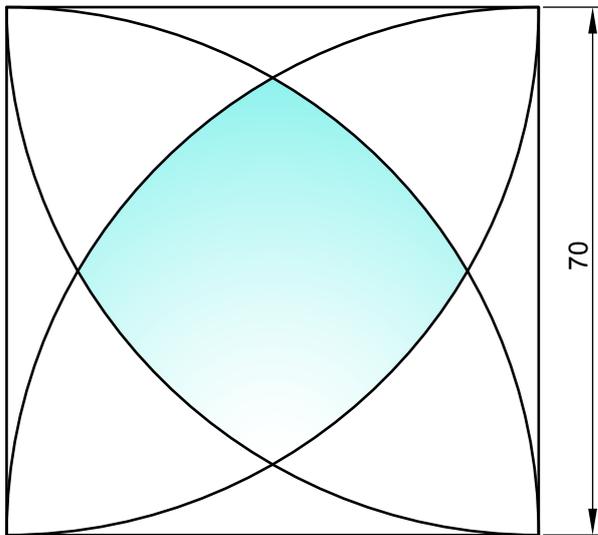


Determinar el cuadrado equivalente a la zona sombreada



Determinar el cuadrado equivalente a la zona sombreada

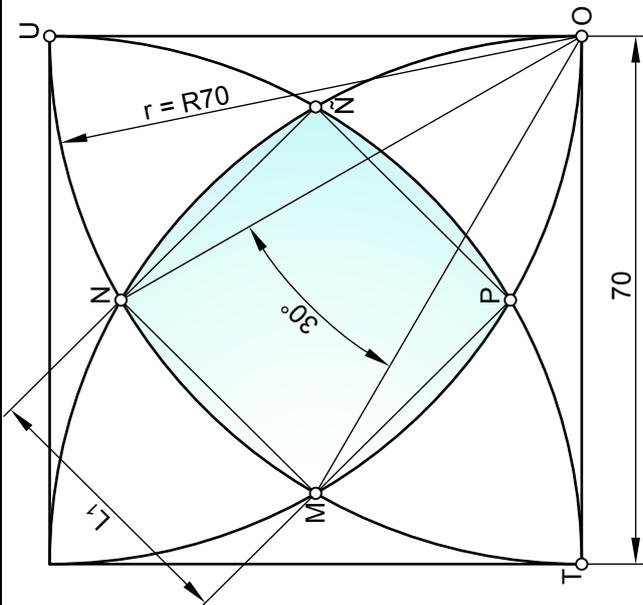


Figura 1

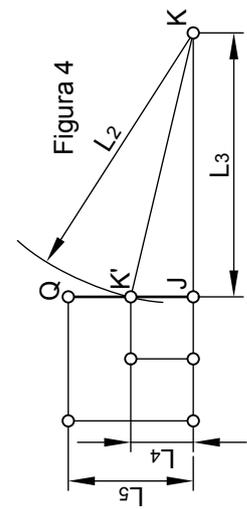


Figura 4

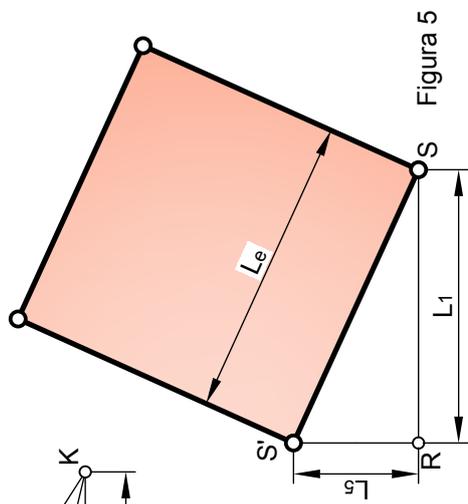


Figura 5

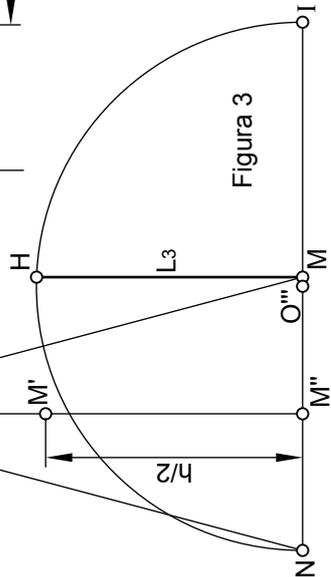


Figura 3

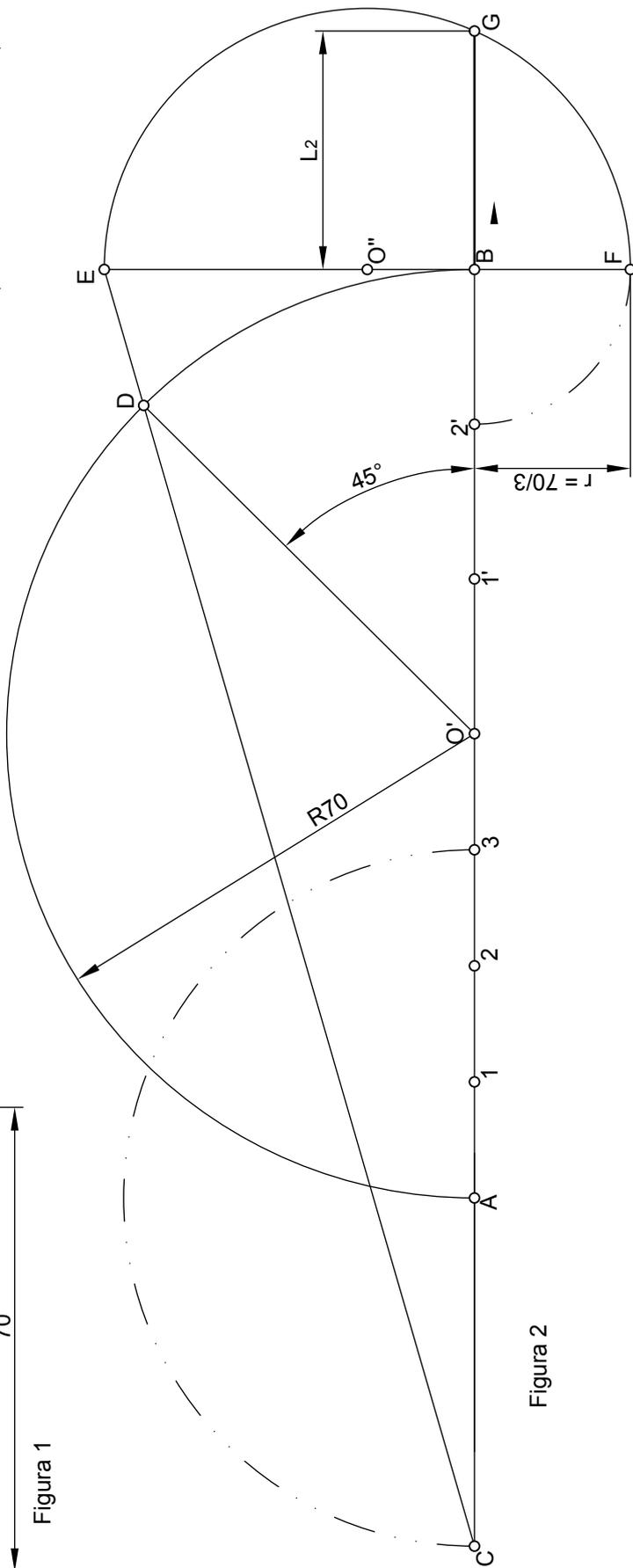


Figura 2

La zona que se quiere cuadrar (figura 1), está limitada por la intersección de los cuatro arcos de centros los vértices del cuadrado y radio el lado de 70 mm, dando un cuadrado curvilíneo MNÑP, que es suma del cuadrado de lado L₁ y de cuatro segmentos circulares.

Analicemos la figura 1:

- Para el área podemos dividir la zona sombreada en los cuatro segmentos circulares MN, NÑ, ÑP y PM de radio 70 mm y el cuadrado de lado L₁.
- Como los cuatro segmentos circulares son iguales, vamos a ver como determinamos, por ejemplo, el segmento circular MN, que es resultado de restar al sector circular MON el triángulo isósceles MON.
- El ángulo en el vértice O vale 30°, pues las tres cuerdas \overline{TM} , \overline{MN} y \overline{NU} son iguales, resultando que abarcan el ángulo de $90^\circ/3 = 30^\circ$. La cuerda \overline{TN} , abarca 60°, pues el triángulo TNO es equilátero, luego la cuerda \overline{NU} abarca 30° y por la simetría, la cuerda \overline{TM} también abarca 30°.
- De lo último dicho, se deduce que el sector circular es una doceava parte del círculo de radio r = 70 mm, que haciendo unos cálculos geométricos, tenemos.

$$\frac{\pi \times r^2}{12} = \frac{\pi \times r}{4} \times \frac{r}{3} = L_2^2$$

es decir, la media proporcional entre los valores $(\pi \times r)/4$ y $r/3$, siendo el primero la rectificación del octavo de circunferencia y el segundo termino, la tercera parte del radio r = 70 mm.

Dicho esto el proceso a seguir es el siguiente:

Cuadratura del segmento circular \overline{MN} , proceso similar al visto en la lámina anterior.

1. Se dibuja (figura 2) con centro O', la semicircunferencia \overline{AB} de radio r.
2. Se divide el radio $\overline{AO'}$ en cuatro partes iguales, llevando tres de esas partes a la izquierda del punto A, obteniendo el punto C.
3. Se dibuja por B una línea perpendicular al diámetro \overline{AB} y por O' el radio $\overline{O'D}$, que forma 45°.
4. Se prolonga la línea CD, que corta a la perpendicular por B, en el punto E. El segmento \overline{BE} es el octavo de la circunferencia, es decir, $(\pi \times r)/4$.
5. Se divide el radio $\overline{O'B}$ en tres partes partes iguales, llevando una de ellas en la prolongación del segmento \overline{BE} , obteniendo el punto F.
6. Se dibuja la semicircunferencia de diámetro \overline{EF} .
7. Se prolonga el diámetro \overline{AB} , que corta a la semicircunferencia anterior, en el punto G. El segmento \overline{BG} es el lado L₂, del cuadrado equivalente al sector circular MON.
8. Se cuadra (figura 3) el triángulo \overline{MON} por el procedimiento de la media proporcional entre su base, \overline{MN} , y la mitad de la altura h/2, $\overline{M'M''}$, obteniendo el lado L₃.
9. Ahora aplicando Pitágoras (figura 4), tomando L₃ como cateto y L₂ como hipotenusa, se obtiene L₄, lado del cuadrado equivalente al segmento circular MN de radio r.
10. Como queremos determinar los cuatros segmentos circulares, se dibuja el cuadrado de lado el doble del L₄, obteniendo el cuadrado de lado L₅, de área cuádruple a la del segmento circular MN.

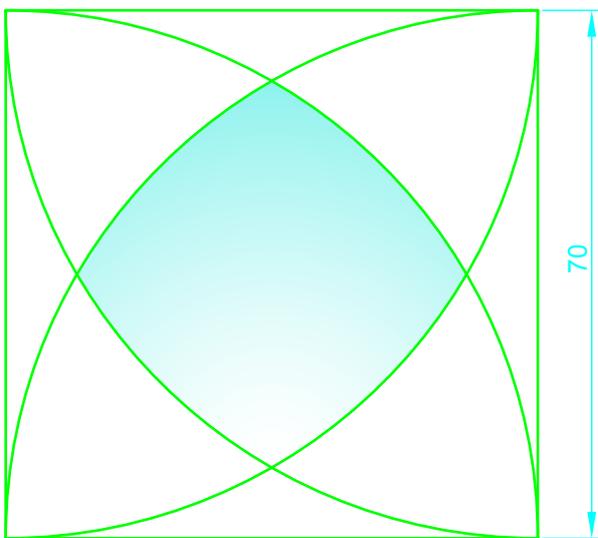
Cuadratura de la suma de los cuatros segmentos circulares y del cuadrado de lado L₁.

11. Aplicando nuevamente Pitágoras (figura 5) entre los lados, L₁ y L₅ como catetos, se dibuja el triángulo $\overline{RSS'}$, cuya hipotenusa da el lado L_e, del cuadrado equivalente al cuadrado curvilíneo MNÑP.

NOTAS:

- En este tipo de construcciones, cuando hay que determinar la diferencia de cuadrados, aplicando Pitágoras, el lado menor se toma como cateto y el mayor como hipotenusa. En caso de sumarse, los dos lados se toman como catetos.
- Este proceso es reiterativo, en caso de tener varios lados de cuadrados, que hay que sumar, se van construyendo sucesivos triángulos rectángulos, cuyos catetos son los lados.
- Si hay que sumar y restar varios cuadrados, primero se suman los que hay que sumar por un lado, luego se suman los que hay que restar, y por último se restan los resultados de la manera indicada al comienzo de esta nota.

Determinar el cuadrado equivalente a la zona sombreada



RG

Equivalencia 4- Selectividad 2009

La zona que se quiere cuadrar (figura 1), está limitada por la intersección de los cuatro arcos de centros los vértices del cuadrado y radio el lado de 70 mm, dando un cuadrado curvilíneo MNÑP, que es suma del cuadrado de lado L₁ y de cuatro segmentos circulares.

Analicemos la figura 1:

- Para el área podemos dividir la zona sombreada en los cuatro segmentos circulares MN, NÑ, ÑP y PM de radio 70 mm y el cuadrado de lado L₁.
- Como los cuatro segmentos circulares son iguales, vamos a ver como determinamos, por ejemplo, el segmento circular MN, que es resultado de restar al sector circular MON el triángulo isósceles MON.
- El ángulo en el vértice O vale 30°, pues las tres cuerdas \overline{TM} , \overline{MN} y \overline{NU} son iguales, resultando que abarcan el ángulo de $90^\circ/3 = 30^\circ$. La cuerda \overline{TN} , abarca 60°, pues el triángulo TNO es equilátero, luego la cuerda \overline{NU} abarca 30° y por la simetría, la cuerda \overline{TM} también abarca 30°.
- De lo último dicho, se deduce que el sector circular es una doceava parte del círculo de radio r = 70 mm, que haciendo unos cálculos geométricos, tenemos.

$$\frac{\pi \times r^2}{12} = \frac{\pi \times r}{4} \times \frac{r}{3} = L_2^2$$

es decir, la media proporcional entre los valores $(\pi \times r)/4$ y $r/3$, siendo el primero la rectificación del octavo de circunferencia y el segundo termino, la tercera parte del radio r = 70 mm.

Dicho esto el proceso a seguir es el siguiente:

Cuadratura del segmento circular \overline{MN} , proceso similar al visto en la lámina anterior.

1. Se dibuja (figura 2) con centro O', la semicircunferencia \overline{AB} de radio r.
2. Se divide el radio $\overline{AO'}$ en cuatro partes iguales, llevando tres de esas partes a la izquierda del punto A, obteniendo el punto C.
3. Se dibuja por B una línea perpendicular al diámetro \overline{AB} y por O' el radio $\overline{O'D}$, que forma 45°.
4. Se prolonga la línea CD, que corta a la perpendicular por B, en el punto E. El segmento \overline{BE} es el octavo de la circunferencia, es decir, $(\pi \times r)/4$.
5. Se divide el radio $\overline{O'B}$ en tres partes partes iguales, llevando una de ellas en la prolongación del segmento \overline{BE} , obteniendo el punto F.
6. Se dibuja la semicircunferencia de diámetro \overline{EF} .
7. Se prolonga el diámetro \overline{AB} , que corta a la semicircunferencia anterior, en el punto G. El segmento \overline{BG} es el lado L₂, del cuadrado equivalente al sector circular MON.
8. Se cuadra (figura 3) el triángulo \overline{MON} por el procedimiento de la media proporcional entre su base, él \overline{MN} , y la mitad de la altura h/2, él $\overline{M'M''}$, obteniendo el lado L₃.
9. Ahora aplicando Pitágoras (figura 4), tomando L₃ como cateto y L₂ como hipotenusa, se obtiene L₄, lado del cuadrado equivalente al segmento circular MN de radio r.
10. Como queremos determinar los cuatros segmentos circulares, se dibuja el cuadrado de lado el doble del L₄, obteniendo el cuadrado de lado L₅, de área cuádruple a la del segmento circular MN.

Cuadratura de la suma de los cuatros segmentos circulares y del cuadrado de lado L₁.

11. Aplicando nuevamente Pitágoras (figura 5) entre los lados, L₁ y L₅ como catetos, se dibuja el triángulo $\overline{RSS'}$, cuya hipotenusa da el lado L_e, del cuadrado equivalente al cuadrado curvilíneo MNÑP.

NOTAS:

- En este tipo de construcciones, cuando hay que determinar la diferencia de cuadrados, aplicando Pitágoras, el lado menor se toma como cateto y el mayor como hipotenusa. En caso de sumarse, los dos lados se toman como catetos.
- Este proceso es reiterativo, en caso de tener varios lados de cuadrados, que hay que sumar, se van construyendo sucesivos triángulos rectángulos, cuyos catetos son los lados.
- Si hay que sumar y restar varios cuadrados, primero se suman los que hay que sumar por un lado, luego se suman los que hay que restar, y por último se restan los resultados de la manera indicada al comienzo de esta nota.