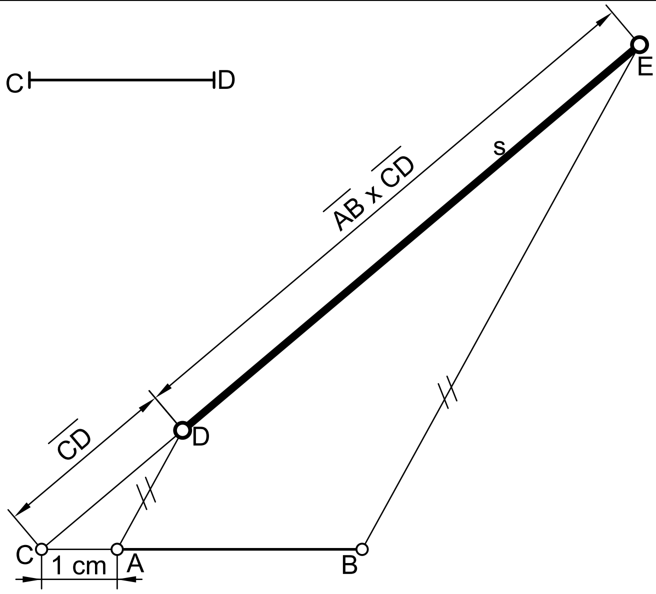
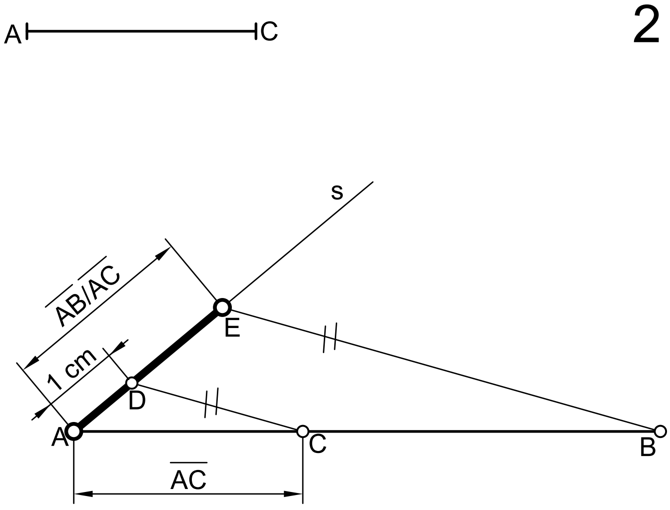
1



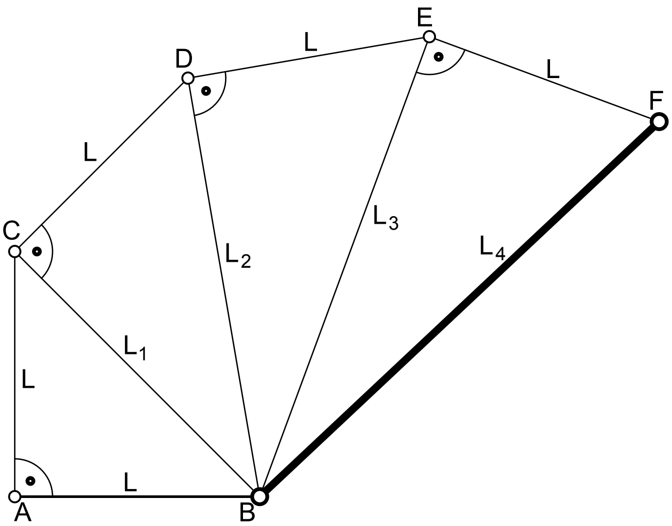
Determinar gráficamente el producto de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Utilizar como unidad el centímetro.

2



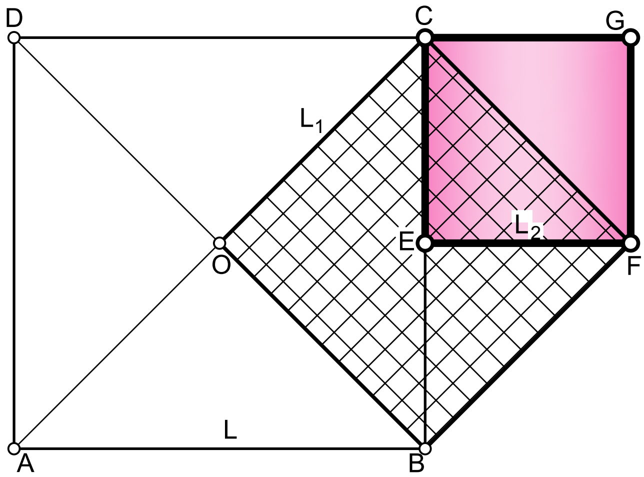
Determinar gráficamente el cociente de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Utilizar como unidad el centímetro.

3



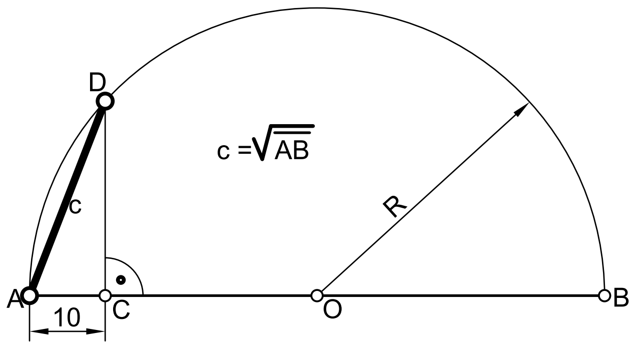
Determinar el lado del cuadrado, cuya área es cinco veces mayor, que la del lado L = $\overline{AB}$.

4



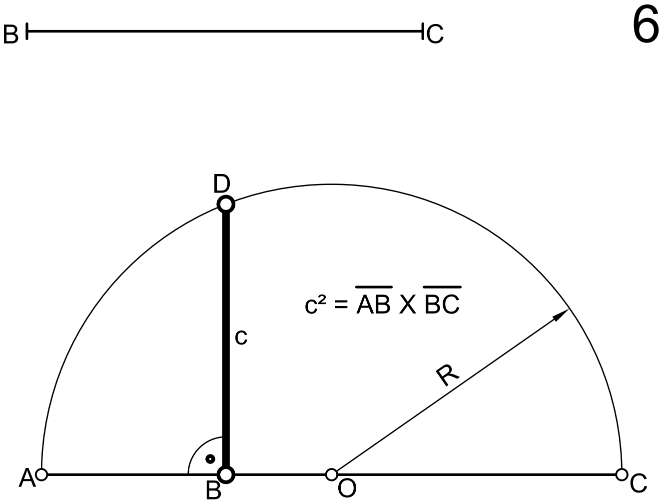
Determinar el lado del cuadrado cuya área es cuatro veces menor, que la del de lado L = $\overline{AB}$.

5



Mediante la aplicación del teorema del cateto, determinar la raíz cuadrado del segmento $\overline{AB}$ = 7.6 cm.

6



Mediante la aplicación del teorema de la altura, determinar la media proporcional de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

ARG	Proporcionalidad	CENTRO
1.8 BT II		NOTA:

El proceso está basado en el teorema de Thales de Mileto, considerado uno de los siete sabios de la antigüedad griega. Los pasos son:

1. Se lleva a la izquierda del punto A un centímetro, obteniendo el segmento $\overline{CA}$.
2. Se dibuja por el punto C, una línea cualquiera, s.
3. Se lleva a partir del punto C y sobre la línea s, el segmento $\overline{CD}$ dado.
4. Se dibuja la línea AD.
5. Por el punto B se dibuja una línea paralela a la AD, que corta a la recta s en el punto E. El segmento $\overline{DE}$ es el producto de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

Demostración: aplicando Thales tenemos

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{CD} \times \overline{AB} = \overline{DE} \times \overline{CA} \quad \text{y como } \overline{CA} = 1$$

se tiene que $\overline{DE} = \overline{CD} \times \overline{AB}$ c.s.q.d.

NOTA: el resultado hubiera sido el mismo, si el segmento $\overline{CA}$ = 1 cm, se resta al $\overline{AB}$.

El proceso es similar al anterior, pero variando la colocación de los segmentos:

1. Se resta a partir del extremo A el segmento AC dado.
2. Se dibuja por el punto A, una línea cualquiera, s.
3. Se lleva a partir de A y sobre la línea s, un segmento $\overline{AD}$ = 1 cm.
4. Se dibuja la línea CD.
5. Por el extremo B, se dibuja un línea paralela a la CD, que corta a la línea s en el punto E. El segmento $\overline{AE}$ es el cociente entre los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

Demostración: aplicando de nuevo a Thales

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \rightarrow (\text{como } \overline{AD} = 1) \rightarrow \overline{AE} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad \text{c.s.q.d.}$$

Este ejercicio es una aplicación reiterada del Teorema de Pitágoras:

1. Se dibuja el triángulo rectángulo, BAC, de catetos L, obteniendo la hipotenusa L_1, que por el teorema de Pitágoras se tiene $L_1^2 = L^2 + L^2 = 2 \times L^2$, es decir, el cuadrado de lado L_1 es de área doble que él de lado L.
2. Se toma este último lado, L_1, como cateto y se dibuja el triángulo rectángulo, BCD, con, L, como el otro cateto, obteniendo la hipotenusa L_2; aplicando Pitágoras: $L_2^2 = L_1^2 + L^2 = 2 \times L^2 + L^2 = 3 \times L^2$, es decir el triple.
3. Repitiendo este proceso dos veces más, se obtiene el lado $L_4^2 = 5 \times L_2$.

NOTA: aquí tenemos un ejemplo de crecimiento armónico, pues si el proceso anterior, se sigue y unimos los vértice A, C, D, ..., se obtiene la espiral logarítmica, cuyo ejemplo más conocido lo tenemos en la concha del Nautilus.

El proceso que se describe a continuación, consiste en una subdivisión del cuadrado original, a partir de tomar como diagonales los lados del cuadrado precedente:

1. Se dibuja el cuadrado, OBFC, de diagonal el lado, BC, del cuadrado ABCD, obteniendo el lado L_1.

   El área de este cuadrado, OBFC, es la mitad del cuadrado ABCD; basta para comprobarlo, ver que el cuadrado, ABCD, está formado por cuatro triángulos isósceles iguales, al dividirlo por sus diagonales, estando el cuadrado OBFC, formado por dos de esos triángulos, luego su área es la mitad.

2. Si este proceso se vuelve a repetir, se tiene el cuadrado, EFGC de lado L_2, cuya diagonal es el lado, L_1, de área la mitad del OBFC, y por tanto, la cuarta parte del original ABCD.

El teorema del cateto: *todo cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección ortogonal sobre dicho cateto*.

El proceso gráfico para resolverlo es el siguiente:

1. Se resta el segmento $\overline{AC}$ = 1 cm, a partir del extremo A al segmento $\overline{AB}$.
2. Se dibuja la semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$.
3. Se dibuja la perpendicular al segmento $\overline{AB}$ por el punto C, que corta a la semicircunferencia en el punto D. El segmento media proporcional es él $\overline{AD}$ = c. En nuestro caso $c^2 = \overline{AB} \times \overline{AC}$, pero como AC vale la unidad se tiene que: $c^2 = \overline{AB}$ ó lo que es lo mismo:

$$c = \sqrt{AB}$$

El teorema de la altura: *la altura correspondiente a la hipotenusa es media proporcional entre las proyecciones ortogonales de los catetos sobre dicha hipotenusa, es decir $c^2 = a \times b$*.

La construcción gráfica es:

1. A continuación del segmento $\overline{AB}$, se lleba el BC, es decir, se suman, obteniendo el segmento $\overline{AC}$.
2. Se dibuja la semicircunferencia de diámetro $\overline{AC}$.
3. Se dibuja la perpendicular al segmento $\overline{AC}$ por el punto B, que corta a la semicircunferencia en el punto D. El segmento media proporcional es él $\overline{BD}$ = c, de tal manera que: $c^2 = \overline{AB} \times \overline{BC}$

ARG

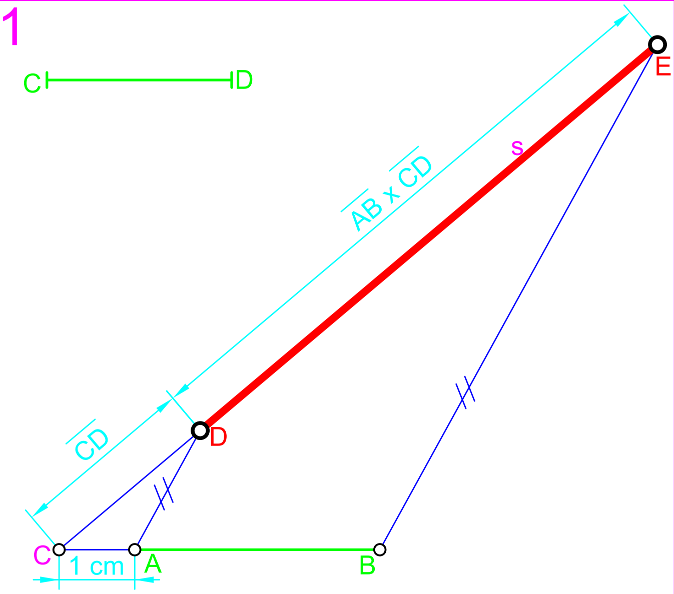
Proporcionalidad

CENTRO

1.8 BT II

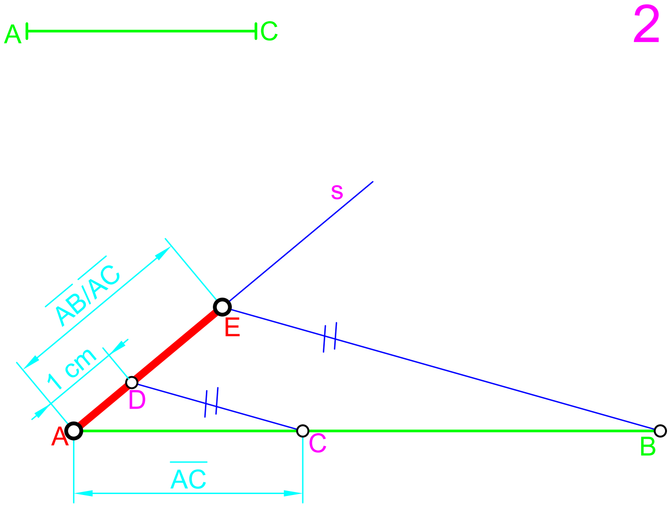
NOTA:

1



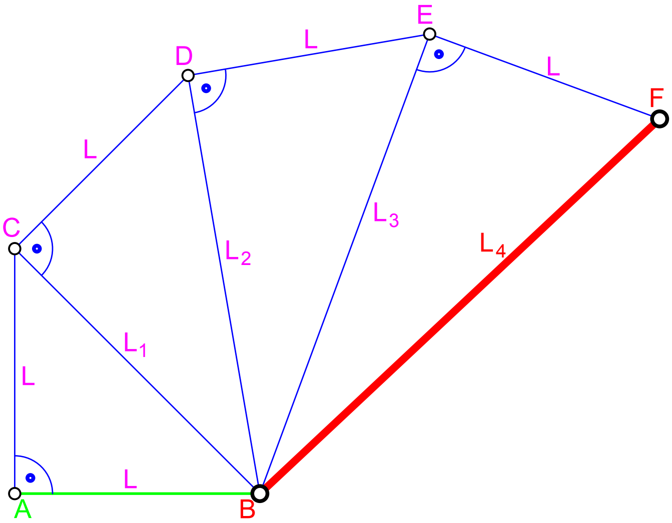
Determinar gráficamente el producto de los segmentos AB y CD. Utilizar como unidad el centímetro.

2



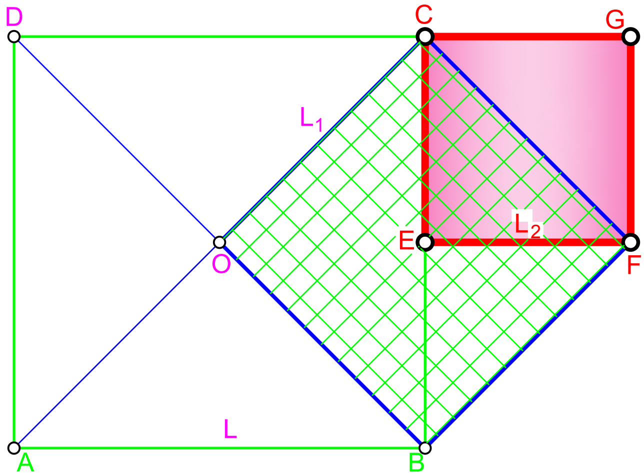
Determinar gráficamente el cociente de los segmentos AB y AC. Utilizar como unidad el centímetro.

3



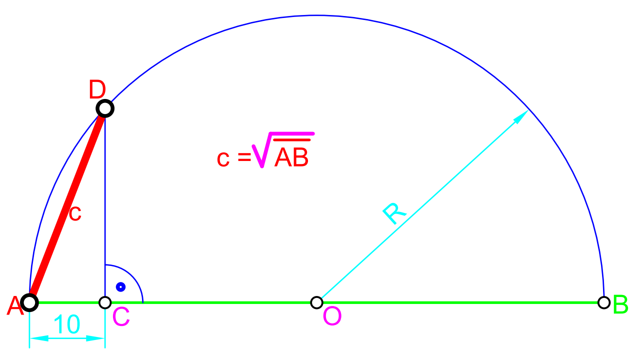
Determinar el lado del cuadrado, cuya área es cinco veces mayor, que la del lado L = AB.

4



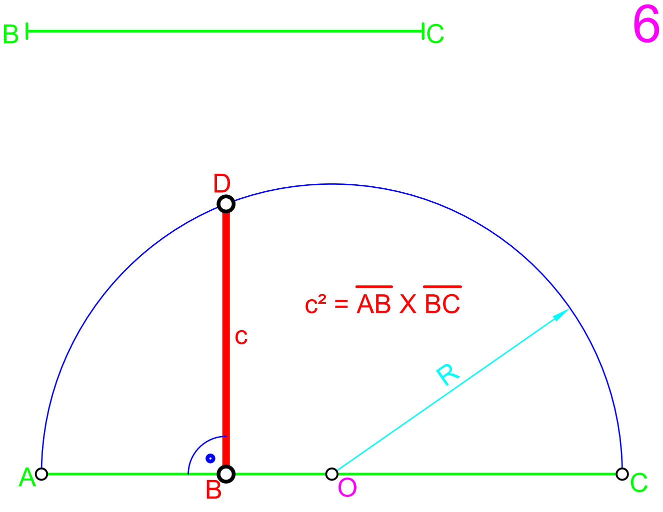
Determinar el lado del cuadrado cuya área es cuatro veces menor, que la del de lado L = AB.

5



Mediante la aplicación del teorema del cateto, determinar la raíz cuadrado del segmento AB = 7.6 cm.

6



Mediante la aplicación del teorema de la altura, determinar la media proporcional de los segmentos AB y AC.

ARG

Proporcionalidad

CENTRO

1.8 BT II

NOTA:

El proceso está basado en el teorema de Thales de Mileto, considerado uno de los siete sabios de la antigüedad griega. Los pasos son:

1. Se lleva a la izquierda del punto A un centímetro, obteniendo el segmento $\overline{CA}$.
2. Se dibuja por el punto C, una línea cualquiera, s.
3. Se lleva a partir del punto C y sobre la línea s, el segmento $\overline{CD}$ dado.
4. Se dibuja la línea AD.
5. Por el punto B se dibuja una línea paralela a la AD, que corta a la recta s en el punto E. El segmento $\overline{DE}$ es el producto de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

Demostración: aplicando Thales tenemos

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{CD} \times \overline{AB} = \overline{DE} \times \overline{CA} \quad \text{y como } \overline{CA} = 1$$

se tiene que $\overline{DE} = \overline{CD} \times \overline{AB}$ c.s.q.d.

NOTA: el resultado hubiera sido el mismo, si el segmento $\overline{CA}$ = 1 cm, se resta al $\overline{AB}$.

El proceso es similar al anterior, pero variando la colocación de los segmentos:

1. Se resta a partir del extremo A el segmento AC dado.
2. Se dibuja por el punto A, una línea cualquiera, s.
3. Se lleva a partir de A y sobre la línea s, un segmento $\overline{AD}$ = 1 cm.
4. Se dibuja la línea CD.
5. Por el extremo B, se dibuja un línea paralela a la CD, que corta a la línea s en el punto E. El segmento $\overline{AE}$ es el cociente entre los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

Demostración: aplicando de nuevo a Thales

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \rightarrow (\text{como } \overline{AD} = 1) \rightarrow \overline{AE} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad \text{c.s.q.d.}$$

Este ejercicio es una aplicación reiterada del Teorema de Pitágoras:

1. Se dibuja el triángulo rectángulo, BAC, de catetos L, obteniendo la hipotenusa L_1, que por el teorema de Pitágoras se tiene $L_1^2 = L^2 + L^2 = 2 \times L^2$, es decir, el cuadrado de lado L_1 es de área doble que él de lado L.
2. Se toma este último lado, L_1, como cateto y se dibuja el triángulo rectángulo, BCD, con, L, como el otro cateto, obteniendo la hipotenusa L_2; aplicando Pitágoras: $L_2^2 = L_1^2 + L^2 = 2 \times L^2 + L^2 = 3 \times L^2$, es decir el triple.
3. Repitiendo este proceso dos veces más, se obtiene el lado $L_4^2 = 5 \times L_2$.

NOTA: aquí tenemos un ejemplo de crecimiento armónico, pues si el proceso anterior, se sigue y unimos los vértice A, C, D, ..., se obtiene la espiral logarítmica, cuyo ejemplo más conocido lo tenemos en la concha del Nautilus.

El proceso que se describe a continuación, consiste en una subdivisión del cuadrado original, a partir de tomar como diagonales los lados del cuadrado precedente:

1. Se dibuja el cuadrado, OBFC, de diagonal el lado, BC, del cuadrado ABCD, obteniendo el lado L_1.

   El área de este cuadrado, OBFC, es la mitad del cuadrado ABCD; basta para comprobarlo, ver que el cuadrado, ABCD, está formado por cuatro triángulos isósceles iguales, al dividirlo por sus diagonales, estando el cuadrado OBFC, formado por dos de esos triángulos, luego su área es la mitad.

2. Si este proceso se vuelve a repetir, se tiene el cuadrado, EFGC de lado L_2, cuya diagonal es el lado, L_1, de área la mitad del OBFC, y por tanto, la cuarta parte del original ABCD.

El teorema del cateto: *todo cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección ortogonal sobre dicho cateto*.

El proceso gráfico para resolverlo es el siguiente:

1. Se resta el segmento $\overline{AC}$ = 1 cm, a partir del extremo A al segmento $\overline{AB}$.
2. Se dibuja la semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$.
3. Se dibuja la perpendicular al segmento $\overline{AB}$ por el punto C, que corta a la semicircunferencia en el punto D. El segmento media proporcional es él $\overline{AD}$ = c. En nuestro caso $c^2 = \overline{AB} \times \overline{AC}$, pero como AC vale la unidad se tiene que: $c^2 = \overline{AB}$ ó lo que es lo mismo:

$$c = \sqrt{\overline{AB}}$$

El teorema de la altura: *la altura correspondiente a la hipotenusa es media proporcional entre las proyecciones ortogonales de los catetos sobre dicha hipotenusa, es decir $c^2 = a \times b$*.

La construcción gráfica es:

1. A continuación del segmento $\overline{AB}$, se lleba el BC, es decir, se suman, obteniendo el segmento $\overline{AC}$.
2. Se dibuja la semicircunferencia de diámetro $\overline{AC}$.
3. Se dibuja la perpendicular al segmento $\overline{AC}$ por el punto B, que corta a la semicircunferencia en el punto D. El segmento media proporcional es él $\overline{BD}$ = c, de tal manera que: $c^2 = \overline{AB} \times \overline{BC}$

ARG

Proporcionalidad

CENTRO

1.8 BT II

NOTA: